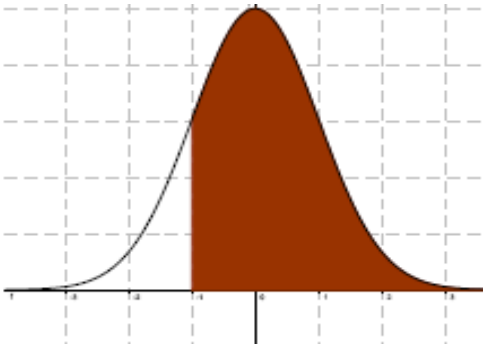
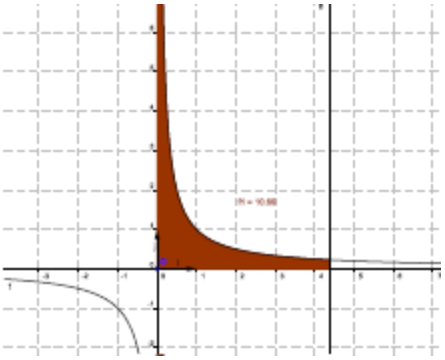
Chapitre 01 : Intégrales généralisées

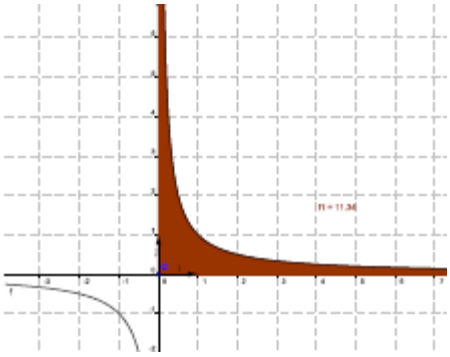
Objectifs : En première année, on a étudié l'intégrale d'une fonction définie et continue sur un intervalle fermé borné de$\mathbb{R}$. Dans ce chapitre, on va étudier le cas d'une fonction continue sur un intervalle (a, b) ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$) sans être continue sur $[a, b]$. Ainsi on rencontrera du calcul d'intégrale :



- ✓ De fonctions sur un intervalle non borné.



- ✓ De fonctions non bornées sur un voisinage de a ou de b



- ✓ Un mélange des deux

Exemple : intégrales de type:$\int_0^{+\infty} \frac{sint}{t}\, dt, \int_0^1 lnt\, dt,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} tant\, dt.$

I. Définitions :

Définition 1 : Une fonction $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite localement intégrable sur I, si elle est intégrable sur tout intervalle compact de I.

Contre exemple : La fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x \; est \; rationnel \\ 1 \; si \; x \; est \; irrationnel \end{cases}$$

est un exemple d'une fonction n'étant pas localement intégrable.

Définition2 : On dit que c est un point singulier pour la fonction f si elle n'est pas bornée en ce point i.e. $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$

1. **Intégrales impropres de 1ère espèce :** On dit que $\int_a^b f(t)dt$ est une intégrale impropre (ou généralisée) de 1ère espèce si au moins l'une des bornes de l'intervalle (a, b) est infinie.

Si f est localement intégrable sur (a, b) alors :

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt, \qquad \int_{-\infty}^b f(t)dt = \lim_{x\to-\infty} \int_x^b f(t)dt.$$

Si les limites ci-dessus existent et sont finies, on dit que les intégrales impropres qu'elles définissent convergent, si non on dit qu'elles divergent.

Exemple01 : Soit p$> 0, I = \int_{-\infty}^0 e^{pt}\, dt$ est une intégrale impropre du 1ère espèce.

$I = \lim_{x\to-\infty} \int_x^0 e^{pt}\, dt = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{e^{pt}}{p}\right]_x^0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-e^{px}}{p} = \frac{1}{p}$. Donc I converge.

Exemple 02 : Soit $J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \lim_{x\to+\infty} arctg(x) = \frac{\pi}{2}$. J converge.

Exemple 03 : $K = \int_\pi^{+\infty} \cos t\, dt = \lim_{x\to+\infty} \int_\pi^x cost\, dt = \lim_{x\to+\infty} sinx$ n'existe pas, alors K diverge.

Exemple 04 : Soit $a > 0, I = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est une intégrale de 1ère espèce.

$$I = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} lnx - lna = +\infty & si \; \alpha = 1 \\ \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_a^x = \begin{cases} +\infty \\ \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1} \end{cases} & si \; \alpha < 1 \\ & si \; \alpha > 1 \end{cases}$$

Alors

$$I = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \begin{cases} converge \; si \; \alpha > 1 \\ diverge \; si \; \alpha \le 1 \end{cases}$$, cette intégrale est dite de Riemann de 1ère espèce.

2. **Intégrales impropres de second espèce :** Soit la fonction f localement intégrable sur (a, b). L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est dite généralisée de 2nd espèce si f possède au moins un point singulier dans l'intervalle (a, b). Si a est un point singulier, par définition

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)dt.$$

Si b est un point singulier

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)dt.$$

Si le point singulier $c \in (a, b)$ alors

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to c^-} \int_a^x f(t)dt + \lim_{x\to c^+} \int_x^b f(t)dt.$$

Si les limites ci-dessus existent et sont finies, on dit que les intégrales impropres qu'elles définissent convergent, si non on dit qu'elles divergent.

Exemple 01 : Soit $I = \int_2^9 \frac{dt}{\sqrt{9-t}}$. 9 est un point singulier pour la fonction $f(t) = \frac{1}{\sqrt{9-t}}$ car $\lim_{t\to 9^-} f(t) = +\infty$. Donc I est une intégrale généralisée de 2nd espèce.

$I = \lim_{x\to 9^-} \int_2^x \frac{dt}{\sqrt{9-t}} = \lim_{x\to 9^-} \left[-2\sqrt{9-t}\right]_2^x = 2\sqrt{7}$ $, d'où\ I\ converge.$

Exemple 02 : Soit $I = \int_0^1 \frac{1}{t}\, dt$ est une intégrale de 2nd espèce car t=0 est un point singulier pour la fonction $f(t) = \frac{1}{t}$. Donc $I = \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{dt}{t} = \lim_{x\to 0^+} (-lnx) = +\infty$ d'où I diverge.

Exemple 03 : Soit $I = \int_0^\pi \frac{sint}{t}\, dt$. On a $\lim_{t\to 0} \frac{sint}{t} = 1 \neq \infty$, donc 0 n'est pas un point singulier et l'intégrale n'est pas une intégrale généralisée. (La fonction $\frac{sint}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 et I converge).

Exemple 04 : Soit α >0, et $I_1 = \int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ est une intégrale impropre de 2nd espèce car a est un point singulier.

$$I_1 = \lim_{x\to a^+} \int_x^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} = \begin{cases} \lim_{x\to a^+} \ln(b-a) - \ln(x-a) = +\infty \quad si\ \alpha = 1 \\ \lim_{x\to a^+} \frac{(b-a)^{-\alpha+1}}{1-\alpha} - \frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty & si\ \alpha > 1 \\ \frac{(b-a)^{-\alpha+1}}{1-\alpha} & si\ \alpha < 1 \end{cases} \end{cases}$$

Ainsi

$I_1 = \int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \begin{cases} converge\ si\ \alpha < 1 \\ diverge\ si\ \alpha \geq 1 \end{cases}$, dite intégrale de Riemann de second espèce

Idem pour $I_2 = \int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$.

Remarques :

- S'il existe au moins un point singulier $c \in (a,b)$ et l'une des bornes (ou les deux) est infinie, alors $\int_a^b f(t)dt$ est une intégrale impropre dite mixte. Dans ce cas l'intégrale s'écrit comme somme d'intégrales généralisées de 1ère espèce et d'intégrales généralisées de 2nd espèce, elle converge si toutes ces intégrales convergent et diverge si l'une au moins diverge.
- Il est inexacte d'écrire que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} f(t)dt$, il suffit de prendre ; comme contre exemple ; $\int_{-\infty}^{+\infty} sint\ dt$ qui diverge bien que $\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} sint\ dt = 0$. Pour étudier la nature d'une intégrale impropre, il faut que chaque intégrale ne contienne qu'une singularité ou une borne infinie :
  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to-\infty} \int_x^0 f(t)dt + \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)dt.$
- Si f est à valeurs complexes, l'intégrale généralisée $\int_I f(t)dt$ converge si et seulement si $\int_I Re(f(t))dt\ et\ \int_I Im(f(t))dt$ convergent.
- Si $\int_I f(t)dt\ et\ \int_I g(t)dt$ sont des intégrales impropres, alors
  $\int_I f(t)dt\ et\ \int_I g(t)dt\ convergent \implies \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \int_I (\alpha f(t) + \beta g(t))\ dt\ converge.$
- Si $\int_I f(t)dt\ converge\ et\ \int_I g(t)dt\ diverge \implies \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}^*,$
  $\int_I \left(\alpha f(t) + \beta g(t)\right)\ dt\ diverge.$

- Si $\int_I f(t)dt \; et \; \int_I g(t)dt$ divergent, alors on ne peut rien conclure sur la nature de l'intégrale $\int_I (\alpha f(t) + \beta g(t))\, dt$.

Exemple :

- Soient $I = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} \; et \; J = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+1}$. I et J sont divergentes. Mais :

$$I + J = \lim_{x \to +\infty} lnx(x+1) = +\infty \, , donc \; I + J \; diverge$$
$$I - J = \lim_{x \to +\infty} ln\frac{x}{1+x} + ln2 = ln2, donc \; I - J \; converge$$

- Les intégrales de Riemann divergent toujours sur $[0, +\infty[$.
- Soit $I = \int_2^{+\infty} \frac{2}{1-t^2}\, dt = \lim_{x \to +\infty} \int_2^x \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right) dt = \lim_{x \to +\infty} \left[ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right]_2^x = -ln3$. Mais $\int_2^x \frac{1}{1+t}\, dt \;\; et \;\; \int_2^x \frac{1}{1-t}\, dt \; divergent$ (intégrales de Riemann).

3. Calcul des intégrales généralisées :

a) Utilisation d'un changement de variable :

Théorème : Soit ϕ une bijection de classe C^1 de l'intervalle (α, β) sur l'intervalle (a, b), alors : $\int_a^b f(u)du \; et \; \int_\alpha^\beta f\big(\phi(t)\big)\phi'(t)dt$ sont de même nature, si elles convergent elles sont égales.

Exemple1 : $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\, lnt} = \langle \begin{matrix} t = e^u \\ dt = e^u\, du \end{matrix} \rangle = \int_{ln2}^{+\infty} \frac{du}{u} \; intégrale \; de \; Riemann \; divergente.$

Exemple2 : $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+2t+3} = \langle \begin{matrix} u = \frac{1+t}{\sqrt{2}} \\ du = \frac{1}{\sqrt{2}}\, dt \end{matrix} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2} - arctg\, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

b) Intégration par parties :

Proposition : Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur l'intervalle [a, b[telles que la fonction fg admet une limite finie en b. Alors : $\int_a^b f'(t)g(t)dt \; et \; \int_a^b f(t)g'(t)dt$ sont de même nature. Si elles convergent, on a :

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt \; = \lim_{x \to b} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

Exemple1 : $I = \int_0^{+\infty} te^{-t}\, dt = \lim_{x \to +\infty} [-xe^{-x} - e^{-x} + 1] = 1$

Exemple 2 : $I = \int_0^1 lnt\, dt = \lim_{x \to 0} \int_x^1 lnt\, dt = \lim_{x \to 0 \to} [-xlnx - 1 + x] = -1$

II. Critères de convergence pour les fonctions positives :

Dans ce paragraphe, nous allons affirmer que certains intégrales généralisées convergent, tout en étant, en général, incapable de les calculer explicitement. En fait, tout les résultats définis ci-dessus sont les mêmes si la fonction est négative sur l'intervalle d'intégration (il suffit de remplacer f par $(-f)$).

Théorème 1 : (problème d'extrémité supérieure b) Soit f une fonction continue positive ou nulle sur l'intervalle [a, b [. L'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si la fonction $x \in]a,b[\longmapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est majorée sur]a, b [.

Exemple : Soit $I = \int_0^1 sin^2 \frac{1}{t}\, dt$ est une intégrale de 2nd espèce (0 est le point singulier).

$F(x) = \int_x^1 sin^2 \frac{1}{t}\, dt \leq \int_x^1 dt = 1 - x < 1$, donc I converge.

Théorème 2 : « **Critère de comparaison »** Soient f et g deux fonctions positives localement intégrables sur (a, b) avec $b = \infty \; ou \; f(b) = \infty$telles que $0 \leq f \leq g$ sur (a, b). Alors :

- $\int_a^b g(t)dt \; converge \implies \int_a^b f(t)dt \; converge.$
- $\int_a^b f(t)dt \; diverge \implies \int_a^b g(t)dt \; diverge.$

Exemple 1 : L'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{sin^2 t}{t^2}\, dt$ est une intégrale généralisée convergente, en effet:

$\forall t \in [1, +\infty[, on\ a\ 0 \leq \frac{sin^2 t}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$ et puisque $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une intégrale de Riemann de 1ère espèce convergente alors I converge.

Exemple 2 : L'intégrale $I = \int_0^1 \frac{lnt}{1+t^2}\, dt$ est une intégrale de second espèce convergente. Les fonctions $t \longmapsto f(t) = \frac{lnt}{1+t^2}\; et\; t \longmapsto g(t) = lnt$ sont négatives ou nulle sur]0, 1[et on a $0 \leq -f(t) \leq -g(t)$ sur cet intervalle. On sait que $\int_0^1 lnt\, dt = -1$ donc converge, ce qui implique que I converge aussi.

Corollaire 1 : Soient f et g deux fonctions positives et localement intégrables sur (a, b) avec $b = \infty$ ou $f(b) = \infty$ (b est une singularité) telles que $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = k$. Alors :

- Si $k \neq 0\; et\; k \neq +\infty, f(x) \sim kg(x) au\, V(b)$ et les deux intégrales sont de même nature.
- Si $k = 0, f(x) << g(x) alors (\int_a^b g(t)dt \; converge \implies \int_a^b f(t)dt \; converge)$
- Si $k = +\infty, f(x) >> g(x) alors\; (\int_a^b g(t)dt \; diverge \implies \int_a^b f(t)dt \; diverge).$

Corollaire 2 :

1. Soit $f: [a, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ localement intégrable,
   - Si $f(t) \sim \frac{k}{t^\alpha} (k \neq 0\; et\; k \neq +\infty) alors\; \int_a^{+\infty} f(t)dt \begin{cases} converge\; si\; \alpha > 1 \\ diverge\; si\; \alpha \leq 1 \end{cases}$
   - Si $\lim_{t \to +\infty} t^\alpha\, f(t) = 0\; alors\; \int_a^{+\infty} f(t)dt \; converge\; si\; \alpha > 1.$
   - Si $\lim_{t \to +\infty} t^\alpha\, f(t) = +\infty\; alors\; \int_a^{+\infty} f(t)dt \; diverge\; si\; \alpha \leq 1.$
2. Soit $f: [a, b[\to \mathbb{R}^+$ localement intégrable avec $f(b) = \infty$
   - Si$f(t) \sim \frac{k}{(b-t)^\alpha} (k \neq 0\; et\; k \neq +\infty) alors\; \int_a^b f(t)dt \begin{cases} converge\; si\; \alpha < 1 \\ diverge\; si\; \alpha \geq 1 \end{cases}$
   - Si $\lim_{t \to b^-} (b-t)^\alpha\, f(t) = 0\; alors\; \int_a^b f(t)dt \; converge\; si\; \alpha < 1.$
   - Si $\lim_{t \to b^-} (b-t)^\alpha\, f(t) = +\infty\; alors\; \int_a^b f(t)dt \; diverge\; si\; \alpha \geq 1$

De même si a est un point singulier, on remplace$(b - t)$ par $(t - a)$

Exemple 01 : Etudions la nature de l'intégrale généralisée de 2nd espèce$I = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{t}\, dt$. La fonction intégrée est positive et continue sur]0, 1], on a $\frac{e^{-t}}{t} \sim \frac{1}{t}$ au voisinage de 0.Or $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ diverge donc I diverge aussi.

Exemple 02 : Soit $I = \int_1^{+\infty} \frac{|sint|}{t^2}\, dt$. La fonction $\frac{|sint|}{t^2}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$, au voisinage de l'infinie $\frac{|sint|}{t^2} = O\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$ ou $\lim_{t\to+\infty} t^{3/2} \frac{|sint|}{t^2} = 0$ donc I converge.

Exemple 03 : Soit l'intégrale $J = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{5}} |\sin(\ln(t))|}{(t-1)^{\frac{3}{2}}}\, dt$.On a $\lim_{\substack{>\\ t\to1}} \frac{e^{-\frac{t}{5}} |\sin(\ln(t))|}{(t-1)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{\substack{>\\ t\to1}} \frac{e^{-\frac{t}{5}}(t-1)}{(t-1)^{\frac{3}{2}}} = +\infty$.

Donc c'est une intégrale mixte, $J = \int_1^2 \frac{e^{-\frac{t}{5}} |\sin(\ln(t))|}{(t-1)^{\frac{3}{2}}}\, dt + \int_2^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{5}} |\sin(\ln(t))|}{(t-1)^{\frac{3}{2}}}\, dt = J_1 + J_2$

Au voisinage de 1, on a
$\frac{e^{-\frac{t}{5}} |\sin(\ln(t))|}{(t-1)^{\frac{3}{2}}} \sim \frac{e^{-\frac{1}{5}}}{(t-1)^{\frac{1}{2}}}$ or $\int_1^2 \frac{e^{-\frac{1}{5}}}{(t-1)^{\frac{1}{2}}} dt$ $est\ une\ intégrale\ de\ Riemann\ de\ 2nd\ espèce\ convergente$, ce qui entraine la convergence de J_1.

Et $\forall t \geq 1, \lim_{t\to+\infty} t^2 \frac{e^{-\frac{t}{5}} |\sin(\ln(t))|}{(t-1)^{\frac{3}{2}}} = 0$, d'où la convergence de l'intégrale J_2.

III. Intégrale généralisée d'une fonction de signe quelconque :

1. Critère de convergence absolue :

Définition : Soit f une fonction localement intégrable sur [a, b [. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge absolument (ou absolument convergente) si $\int_a^b |f(t)|\, dt$ converge.

Théorème : Toute intégrale généralisée absolument convergente est convergente :

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

En revanche, la réciproque est fausse.

Exemple : Soit $I = \int_1^{+\infty} \frac{sint}{t^2}\, dt$ qui est impropre de 1ère espèce. On a $\left|\frac{sint}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}, \forall t \in [1, +\infty[$, or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente donc $\int_1^{+\infty} \left|\frac{sint}{t^2}\right|\, dt$ converge aussi. D'où I converge absolument donc converge.

Définition : Soit f une fonction localement intégrable sur [a, b[. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ est semi convergente si $\int_a^b |f(t)|\, dt$ diverge et $\int_a^b f(t)dt$ converge.

Exemple : L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{sint}{t}\, dt$ est semi convergente, en effet :

Par une intégration par parties, on obtient

$$\int_1^x \frac{sint}{t}\,dt = \left\langle \begin{matrix} u' = sint = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ v = \frac{1}{t} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} u = (sin\left(\frac{t}{2}\right))^2 \\ v' = -\frac{1}{t^2} \end{matrix} \right\rangle = \frac{(sin\left(\frac{t}{2}\right))^2}{\mathrm{t}}\Bigg|_1^{\mathrm{x}} + \int_1^{\mathrm{x}} \frac{(sin\left(\frac{t}{2}\right))^2}{t^2}\,\mathrm{dt}$$

Ce qui implique que

$$\int_1^{+\infty} \frac{sint}{t}\,dt = -(sin\left(\frac{1}{2}\right))^2 + \int_1^{+\infty} \frac{(sin\left(\frac{t}{2}\right))^2}{t^2}\,\mathrm{dt}$$

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{(sin\left(\frac{t}{2}\right))^2}{t^2}$ dtconverge, alors $\int_1^{+\infty} \frac{sint}{t}\,dt$ converge aussi.

Mais on sait que $\forall t \geq 1, \frac{|sint|}{t} \geq \frac{|sint|^2}{t} = \frac{1-\cos(2t)}{2t}$

Par une intégration par parties on montre que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t}\,dt = \frac{sin2}{4} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{4t^2}dt$ et donc convergente.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t}\,dt$ est une intégrale de Riemann de 1ère espèce divergente, d'où $\int_1^{+\infty} \frac{|sint|}{t}dt$diverge.

2. Critère d'Abel :

Théorème : Soit $f, g: [a, b[\to \mathbb{R}$ localement intégrables telles que

- f positive, décroissante sur [a, b[et de limite nulle en b (b est singulier ou infinie).
- $\exists M > 0\ tel\ que\ \forall x, y \in [a, b[\ on\ ait \left|\int_x^y g(t)dt\right| \leq M$

Alors $\int_a^b f(t)g(t)dt$ converge.

Exemple : Les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{sint}{t^\alpha}\,dt\ et\ \int_1^{+\infty} \frac{cost}{t^\alpha}\,dt$ convergent $\forall \alpha > 0$, car la fonction $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante et de limite nulle en$+\infty\ pour\ tout\ \alpha > 0$, et

$\forall x, y \in [1, +\infty[\ on\ a \left|\int_x^y sint\,dt\right| = |cosx - cosy| \leq |\cos x| + |\cos y| \leq 2.$

3. Utilisation d'un développement limité ou asymptotique :

Quand la fonction intégrée n'est pas de signe constant, on ne peut pas appliquer les critères d'équivalence.

Exemple 1 : Etudier la nature de l'intégrale$I = \int_1^{+\infty} \frac{sint}{\sqrt{t}+sint}\,dt.$

$$\frac{sint}{\sqrt{t}+sint} = \frac{sint}{\sqrt{t}}\,\frac{1}{1+\frac{sint}{\sqrt{t}}};\ \lim_{t\to+\infty} \frac{sint}{\sqrt{t}} = 0$$

Donc si on pose $u = \frac{sint}{\sqrt{t}}, quand\ t \in V(+\infty), u \in V(0).$

En appliquant le développement limité au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$$

D'où $\frac{1}{1+\frac{sint}{\sqrt{t}}} = 1 - \frac{sint}{\sqrt{t}} + \frac{sin^2t}{t} + o(\frac{sin^2t}{t})$ et $\frac{sint}{\sqrt{t}+sint} = \frac{sint}{\sqrt{t}} - \frac{sin^2t}{t} + \frac{sin^3t}{t^{\frac{3}{2}}} + o(\frac{sin^3t}{t^{\frac{3}{2}}})$.

Or $\int_1^{+\infty} \frac{sint}{\sqrt{t}}\, dt$ converge d'après le critère d'Abel,

$\int_1^{+\infty} \frac{sin^2t}{t}\, dt = \int_1^{+\infty} \frac{1-cos2t}{2t}\, dt = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{2t} - \int_1^{+\infty} \frac{cos2t}{2t}\, dt$ diverge car c'est la somme d'une intégrale de Riemann divergente et une intégrale qui converge d'après le critère d'Abel.

$\int_1^{+\infty} \frac{sin^3t}{t^{\frac{3}{2}}} + o(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}})dt$ est absolument convergente ($o(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}})$ désigne une fonction de t qui est, en valeur absolue, majorée par certain $\frac{M}{t^{\frac{3}{2}}}$ au voisinage de l'infinie). Donc I diverge.

Exemple 02 : Soit$I = \int_1^{+\infty} \left(\sqrt{t^2 + cost} - t\right) dt$. Le DL de $\sqrt{1+u}$ au voisinage de 0 est donné par

$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2)$, d'où$\sqrt{t^2 + cost} - t = t\sqrt{1 + \frac{cost}{t^2}} - t = \frac{cost}{2t} - \frac{cos^2t}{8t^3} + o(\frac{1}{t^3})$.

Donc I converge car c'est la somme d'une intégrale convergente (d'après Abel) et une intégrale absolument convergente.

IV. Fonctions définies par des intégrales généralisées (Intégrales généralisée dépendant d'un paramètre) :

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On considère un intervalle semi-ouvert $J = [a, b[$ et une fonction de deux variables

$$f: I \times J \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ ou\ \mathbb{C}$$
$$(x,t) \longmapsto f(x,t)$$

On suppose ou bien que $b = \infty$ ou bien que $b < \infty\ et\ \lim_{t\to b} f(x,t) = \infty$, ainsi l'intégrale $\int_J f(x,t)dt$ est une intégrale généralisée dépendant du paramètre x. Donc le premier problème posé est celui de la convergence d'une famille d'intégrales généralisées : on est amené à déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lequel $\int_J f(x,t)dt$ converge, dit ensemble de définition de la fonction

$$F(x) = \int_J f(x,t)dt$$

Si pour tout $x \in I, \int_J f(x,t)dt$ converge, on dit que F est une fonction définie par une intégrale généralisée. Le but de cette partie est l'étude de la continuité et de la dérivabilité de cette fonction.

1. Convergence uniforme d'une intégrale généralisée dépendant d'un paramètre:

a. Si $J = [a, +\infty[$, on dit que l'intégrale$\int_J f(x,t)dt$ converge uniformément sur I ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon \geq 0 : T \geq \eta_\varepsilon \Rightarrow sup_{x\in I} \left|\int_T^{+\infty} f(x,t)dt\right| \leq \varepsilon.$$

b. Si $J = [a, b[$ tel que b est un point singulier. L'intégrale $\int_J f(x,t)dt$ est dite uniformément convergente sur I ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon \geq 0 : 0 \leq b - T \leq \eta_\varepsilon \Rightarrow sup_{x \in I} \left| \int_{b-T}^{b} f(x,t)dt \right| \leq \varepsilon$.

c. Si $J =]a, b]$ avec a un point singulier, $\int_J f(x,t)dt$ est dit uniformément convergent sur I ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon \geq 0 : 0 \leq T - a \leq \eta_\varepsilon \Rightarrow sup_{x \in I} \left| \int_{a}^{T-a} f(x,t)dt \right| \leq \varepsilon$.

2. Convergence normale d'une intégrale généralisée dépendant d'un paramètre:

On dit que l'intégrale $\int_J f(x,t)dt$ est normalement convergente sur I s'il existe une fonction

$\varphi : J \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :

$$\begin{cases} i) \forall (x,t) \in I \times J, |f(x,t)| \leq \varphi(t) \\ ii)\ l'intégrale \int_J \varphi(t)dt\ converge \end{cases}$$

Exemple : Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt$

La fonction $f(x,t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$, en plus elle est positive. Donc $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt$ est une intégrale généralisée de 1ère espèce.

$$\lim_{t \to +\infty} t^\alpha \frac{e^{-xt}}{1+t^2} = \begin{cases} 0\ si\ x > 0\ et\ \alpha = 2 \\ +\infty\ si\ x < 0\ et\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Pour $x = 0, \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}$

Ce qui signifie que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt$ converge pour tout $\in [0, +\infty[$, donc F est définie sur $\mathbb{R}^+$. En plus on a $\forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$, et comme $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$ converge alors $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$.

Théorème : Si $\int_J f(x,t)dt$ converge normalement sur I alors elle converge uniformément sur I.

Critère d'Abel de convergence uniforme : Soient

$f, g : I \times J \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ et\ F(x) = \int_J f(x,t)\, g(x,t)dt\ tel\ que\ J = [a, b[\ et\ b = \infty\ ou\ b\ point\ singulier$

Tels que :

i. $\forall x \in I, f(x,t)$ est positive et décroissante par rapport à t
ii. $f(x,t)_{t \to +\infty} \rightrightarrows 0$ ($resp. f(x,t)_{t \to b^-} \rightrightarrows 0$) (converge uniformément par rapport à x)
iii. $\exists M > 0 tel\ que\ \forall x \in I, \forall y", y' \in J, \left| \int_{y'}^{y"} g(x,t)dt \right| \leq M$ (M est une constante).

Alors : $F(x) = \int_J f(x,t)\, g(x,t)dt$ converge uniformément sur I.

Exemple : Etudier la convergence uniforme de $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos((1+x^2)t)}{1+x^2+t^2}\, dt\,; x \in \mathbb{R}$.

- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x,t) = \frac{1}{1+x^2+t^2}$ est positive, décroissante en t et $\frac{1}{1+x^2+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \to 0$ donc $f(x,t)_{t\to+\infty} \rightrightarrows 0$ par rapport à x.
- $\forall y', y'' \in [0,+\infty[, \left|\int_{y'}^{y''} \cos((1+x^2)t)\, dt\right| = \left|\frac{\sin(1+x^2)y'' - \sin(1+x^2)y'}{1+x^2}\right| \leq \frac{2}{1+x^2} \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$

D'où la convergence uniforme de $\int_0^{+\infty} \frac{\cos((1+x^2)t)}{1+x^2+t^2}\, dt$ sur $\mathbb{R}$.

4. Propriétés :

Théorème de continuité : Soit $F(x) = \int_J f(x,t)dt$ où $J = [a,b[, avec\ b = \infty\ ou\ \lim_{t\to b} f(x,t) = \infty$.

- ✓ Si $\forall x \in I, la\ fonction\ t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J.
- ✓ Si $\forall t \in J, la\ fonction\ x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur I.
- ✓ Si l'intégrale $\int_J f(x,t)dt$ converge uniformément sur I

Alors la fonction $F(x) = \int_J f(x,t)dt$ est continue sur I et

$$\forall x_0 \in I, \lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{x\to x_0} \int_J f(x,t)dt = \int_J \lim_{x\to x_0} f(x,t)dt = \int_J f(x_0,t)dt.$$

Corollaire : Pour démontrer que la fonction $F(x) = \int_J f(x,t)dt$ est définie et continue sur I, il suffit de montrer que :

- ✓ $\forall x \in I, la\ fonction\ t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J.
- ✓ $\forall t \in J, la\ fonction\ x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur I.
- ✓ Il existe une fonction positive $\varphi: J \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur J vérifiant :

$$\begin{cases} \forall (x,t) \in I \times J, |f(x,t)| \leq \varphi(t) \\ l'intégrale \int_J \varphi(t)dt\ converge \end{cases}$$

Théorème d'intégration : Soit $F(x) = \int_J f(x,t)dt$ où $J = [a,b[, avec\ b = \infty\ ou\ \lim_{t\to b} f(x,t) = \infty$.

- ✓ Si $\forall x \in I, la\ fonction\ t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J.
- ✓ Si $\forall t \in J, la\ fonction\ x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur I.
- ✓ Si l'intégrale $\int_J f(x,t)dt$ converge uniformément sur I

Alors :

$$\forall \alpha, \beta \in I, \int_\alpha^\beta F(x)dx = \int_\alpha^\beta \left(\int_J f(x,t)dt\right) dx = \int_J \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)dx\right) dt \text{ (théorème de Fubini)}$$

Théorème de dérivation : Soit $F(x) = \int_J f(x,t)dt$ où $J = [a,b[, avec\ b = \infty\ ou\ \lim_{t\to b} f(x,t) = \infty$.

- ✓ Si $\forall x \in I, les\ fonctions\ t \longmapsto f(x,t) et\ t \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sont continues par morceaux et intégrables sur J.
- ✓ Si $\forall t \in J, les\ fonctions\ x \longmapsto f(x,t) et x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sont continues sur I.

✓ Si l'intégrale $\int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ converge uniformément sur I

Alors la fonction $F(x) = \int_J f(x,t)dt$est de classe C^1 sur I, et on a :

$$F'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_J f(x,t)dt\right) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$ (règle de Leibniz)

Exercice : Pour tout réel x, on considère$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\,sinxt}{t}\,dt$.

1) Etudier l'existence de F.
2) Etudier la dérivabilité de F, puis calculer sa dérivée F'.
3) En déduire la valeur de F.

Applications :

Fonction Gamma Γ d'Euler : On appelle fonction Γ d'Euler l'application :

$$\Gamma:]0,+\infty[\to \mathbb{R}, x \longmapsto \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ converge pour tout x strictement positif, en effet :

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt = I_1 + I_2$$

Si $x \geq 1$: 0 n'est pas une singularité, donc I_1 converge et $\lim_{t\to+\infty} t^2 t^{x-1}e^{-t} = 0$ ce qui assure la convergence de I_2.

Si $0 < x < 1$: au voisinage de 0 on a : $t^{x-1}e^{-t} \sim t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ et $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}dt$ converge car 1-x< 1 d'où I_1 converge, en plus I_2 converge car$\lim_{t\to+\infty} t^2 t^{x-1}e^{-t} = 0$.

Propriétés :

- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \forall x > 0$. En particulier : $\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1$.
- $\forall x > 0, \Gamma(x+n+1) = x(x+1)\ldots(x+n-1)(x+n)\Gamma(x)$.
- $\forall x > 0, \Gamma(n+1) = n!$.
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
- $\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \Gamma\left(\mathrm{n}+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2\mathrm{n})!}{2^{2\mathrm{n}}\mathrm{n}!}\sqrt{\pi}$
- $\forall x > 0, \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(lnt)^n t^{x-1}\,dt$
- $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}\,(1+\varepsilon(x))avec\ \lim_{x\to+\infty}\varepsilon(x) = 0$: Formule de Stirling.

Fonction βêta d'Euler : Pour tout réels strictement positifs p et q, on définit la fonction

$\beta(p,q) = \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}\,du$ Dite la fonction bêta d'Euler.

$$\beta(p,q) = \int_0^{\frac{1}{2}} u^{p-1}(1-u)^{q-1}\,du + \int_{\frac{1}{2}}^{1} u^{p-1}(1-u)^{q-1}\,du$$

- Au voisinage de 0, $u^{p-1}(1-u)^{q-1} \sim \frac{1}{u^{1-p}}$, donc $\int_0^{\frac{1}{2}} u^{p-1}(1-u)^{q-1}\,du$ converge pour $p > 0$.
- Au voisinage de 1, $u^{p-1}(1-u)^{q-1} \sim \frac{1}{(1-u)^{1-q}}$ donc $\int_{\frac{1}{2}}^{1} u^{p-1}(1-u)^{q-1}\,du$ converge pour $q > 0$.

Ainsi $\beta(p,q)$ converge si $p > 0\ et\ q > 0$.

Propriétés :

- $\forall p,q > 0, \beta(p,q) = \beta(q,p)$
- $\forall p,q > 0, \beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$
- $\forall p,q > 0, \beta(p,q) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}\,du$
- $Si\ p \notin \mathbb{Z}, \beta(p,1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{sin\pi x}$.

Résumé des techniques : Pour étudier la convergence d'une intégrale généralisée de f sur un intervalle I, on commence par trouver tous les points de I où il y a problème, vérifier si se sont de vraies singularités et séparer l'intégrale en plusieurs de sorte que chacune ne comprend qu'une singularité ou bien une seule borne infinie.

- Si f est positive sur (a,b), on applique les critères de comparaisons.
- Si f n'est pas de signe constant,
  - On essaye de montrer la convergence absolue, si l'intégrale ne converge pas absolument, ça ne veut rien dire.
  - Appliquer le critère d'Abel.
  - Utiliser l'intégration par parties.
  - Utiliser un changement de variables.
  - Utiliser un développement limité ou asymptotique, prendre un ordre suffisamment grand pour que le reste donne naissance à une intégrale absolument convergente (en intégrale de Riemann ou d'une fonction de signe constant).

Erreurs à ne pas commettre :

- Une intégrale généralisée qui est égale à une intégrale absolument convergente n'est pas nécessairement elle-même absolument convergente. **Contre exemple :**
  $\int_0^{+\infty} \frac{sint}{t}\,dt\ \ est\ semi\ convergente = \int_0^{+\infty} \frac{sin^2 t}{t^2}\,dt$ qui est absolument convergente.
- Ne jamais utiliser des équivalences avec des fonctions qui ne sont pas de signe constant.
- Affirmer que l'intégrale d'une somme est la somme des intégrales sans avoir vérifier que chacune d'elles converge. **Contre exemple :** on a $\int_0^1 \frac{1-cost}{t}\,dt$ converge, mais $\int_0^1 \frac{dt}{t}\ et\ \int_0^1 \frac{cost}{t}\,dt$ divergent.
- Faire une intégration par parties avec des bornes douteuses. **Contre exemple :** L'écriture
  $\int_0^{+\infty} \frac{sint}{t}\,dt = \left[\frac{-cost}{t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{cost}{t^2}\,dt$ est fausse.