REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

ECOLE SUPERIEURE DES SCIENCES APPLIQUEES
المدرسة العليا في العلوم التطبيقية

TLEMCEN
تلمسان

Département de formation préparatoire
Module Algèbre 1 AU :2017/2018
durée : 2 heures

Epreuve finale numéro 1

Exercice 1 (6 pts). Soient E un ensemble non vide, $A, B \in \mathcal{P}(E)$ et $f : E \to F$ une application.

Les propositions suivantes sont elles vraies ou fausses :

1. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
2. $P \in \mathbb{R}[X]$ avec $degP$ impair $\Rightarrow P$ possède au moins une racine réelle
3. $Card(A \cup B) + Card(A \cap B) = Card(A) + Card(B)$

Exercice 2 (5 pts). Soit $(A, +, .)$ un anneau et C la partie de A définie par :

$$C = \{x \in A / \forall a \in A, xa = ax\}$$

1. Montrer que : C est un sous groupe de $(A, +)$
2. En déduire que C est un sous anneau de $(A, +, .)$

Exercice 3 (4 pts). Soient $b \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ avec $P(X) = X^3 + (b-2)X^2 - (1+2b)X + 2$

1. Vérifier que P admet au moins une racine réelle α
2. Factoriser le polynome P dans $\mathbb{R}[X]$
3. On définit l'application :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & P(x) \end{array}$$

En déduire que f n'est pas injective.

Exercice 4 (5 pts). Soit $F(X) = \dfrac{1}{(X-1)^3(X^2+3X+2)}$

1. Former la décomposition en éléments simples de la fraction F.
2. En déduire un couple $(U, V) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que : $(X-1)^3U(X) + (X^2+3X+2)V(X) = 1$

Bonne chance