Chapitre 04 : Séries Entières

On étudie dans ce chapitre une famille particulière des séries de fonctions : celles de la forme $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ ou $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ dites séries entières. On s'intéresse dans un premier temps aux propriétés de la somme d'une série entière (domaine de convergence, continuité,…), on verra ensuite comment exprimer des fonctions usuelles comme somme des séries entières.

I. Définition et domaine de convergence d'une série entière :

1. Définition :

On appelle série entière réelle (resp. complexe) toute série de fonctions $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ avec x réel (resp. $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ avec z complexe) et $(a_n)_n$ une suite numérique réelle ou complexe.

Exemples :

$\sum_{n\geq 0} z^n$, $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$, $\sum_{n\geq 0} (\sin n)\, z^n$.

On s'intéresse principalement aux séries entières complexes dont on déduira facilement les résultats pour les séries entières réelles. La première question à se poser est celle du domaine de convergence : pour quelles valeurs z, la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$converge ?

2. Domaine de convergence d'une série entière :

Lemme d'Abel :

- S'il existe $z_0$tel que la série $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ converge, alors la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente pour tout z tel que$|z| < |z_0|$.
- Et s'il existe $z_0$tel que la série $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ diverge, alors la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est divergente pour tout z tel que$|z| > |z_0|$.

Preuve : Soit le nombre complexe $z_0 \neq 0$ tel que la série $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ converge (toute série entière converge pour z=0), donc $\lim_{n\to+\infty} a_n z_0^n = 0$(condition nécessaire pour la convergence d'une série), ceci implique aussi que la suite $(a_n z_0^n)_n$ est bornée, disons par M. Soit $z\ tel\ que\ |z| < |z_0|$

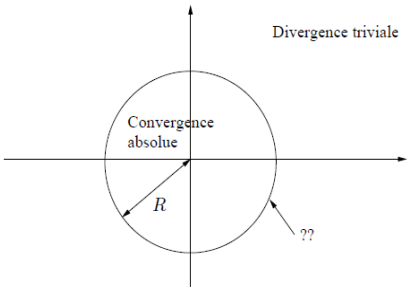
Alors : $|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n\ or \left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$, donc la série géométrique $\sum_n \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ converge. On en conclut que $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$.

Si on suppose que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ diverge, et qu'il existe z_1 tel que$|z_1| > |z_0|$ avec $\sum_{n\geq 0} a_n z_1^n$ convergente, alors la première assertion du lemme d'Abel implique que la série $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ converge absolument, ce qui est absurde.

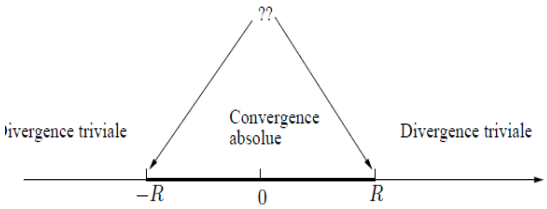
Théorème : « Rayon de convergence d'une série entière » Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière. <u>Il existe un unique</u> réel R positif ou nul, ou éventuellement infini ($R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$), possédant les propriétés suivantes :

- ♣ La série converge absolument pour tout z tel que $|z| < R$.
- ♣ La série diverge grossièrement ($i.e\ \lim_{n\to+\infty} a_n z^n \neq 0$) pour tout z tel que $|z| > R$.

Le nombre réel R est dit <u>rayon de convergence</u> de la série entière$\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, et le disque ouvert centré en 0 de rayon R, noté$D(0,R) = \{z \in \mathbb{C}\ tels\ que\ |z| < R\}$, est appelé <u>disque ouvert de convergence</u>.



Comportement d'une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon R.



– Comportement d'une série entière réelle $\sum a_n x^n$ de rayon R.

Exemples :

- La série géométrique $\sum_{n\geq 0} z^n$ converge absolument si$|z| < 1$, et diverge grossièrement pour $|z| \geq 1$, donc son rayon de convergence R=1 et son domaine de convergence $D_c = D(0,1)$.
- La série entière $\sum_{n\geq 1}(\sin n)x^n$ converge absolument pour$|x| < 1\ car\ |\sin n\ x^n| \leq |x|^n$, et diverge pour$x = 1, car\ \lim_{n\to+\infty} \sin n \neq 0$, donc et d'après le lemme d'Abel elle est divergente pour toute valeur de x tel que$|x| > 1$, alors son rayon de convergence R=1.
- La série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ converge absolument pour toute valeur complexe z, en effet : $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{z^n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{z}{(n+1)}\right| = 0 < 1, \forall z \in \mathbb{C}$.

Remarques :

- ➢ Toute série entière possède un rayon de convergence.
- ➢ Dire que R=0 signifie que la série entière converge uniquement pour z=0.
- ➢ Si la série converge pour tout complexe z, on dit que le rayon de convergence est infini.
- ➢ On ne peut rien conclure sur la nature de la série entière lorsque$|z| = R$.
- ➢ Le rayon de convergence est aussi défini par $R = Sup\ \{r \in \mathbb{R}^+\ tel\ que\ \sum_n |a_n| r^n\ converge\}$.

Proposition : Soit la série entière$\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

- ♣ Si la limite $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$ existe, alors le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est R=$\frac{1}{l}$
- ♣ Si pour n assez grand, $a_n \neq 0\ et\ \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$ existe, alors le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est R=$\frac{1}{l}$

Exemples :

- Soit la série entière$\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n}$, on a $a_n=\frac{1}{n}, \forall n\geq 1\ et\ donc\ \ \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$, donc le rayon de convergence est égal à 1. Pour$|z|=1\ i.e\ z=e^{i\theta}$, la série $\sum_{n\geq 1}\frac{e^{in\theta}}{n}$ converge d'après le critère d'Abel sauf pour les valeurs θ multiples de 2π. Ce qui signifie que le domaine de convergence de cette série entière est
  $D_c=D(0,1)\setminus\{z=e^{i\theta}\ tel\ que\ \theta=2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}=\bar{D}(0,1)\setminus\{z=1\}$.
- Considérons la série entière$\sum_{n\geq 1}\left(3+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{2n}x^n$,
  $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\left(3+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{2n}\right|}=9\Rightarrow R=\frac{1}{9}$. Le domaine de convergence de cette série est$\left]-\frac{1}{9},\frac{1}{9}\right[$, car la limite $\lim_{n\to+\infty}\left|\left(3+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{2n}x^n\right|\neq 0\ \ pour\ |x|=\frac{1}{9}$

Attention : La proposition précédente est basée sur l'existence des limiteslim$_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\ ou\ \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$, mais si ces limites n'existent pas cela ne signifie pas que le rayon de convergence n'existera pas : car toute série entière possède un rayon de convergence $R\in\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$. Le cas classique où la proposition ne s'applique pas est celui des séries lacunaires, c'est-à-dire ayant une infinité de termes nuls. Par exemple la série$\sum_{n\geq 0}\frac{z^{2n}}{2^n}$, dont tous les coefficients impairs a_{2n+1} sont nuls. Dans ce cas ; ou bien on applique le critère de D'Alembert d'origine ; ou bien on effectue un changement de variable, ici $u=z^2$, afin de se ramener à une série non lacunaire.

Exemples :

- Soit la série entière $\sum_{n\geq 0}3^n x^{2n}$, on donne la représentation canonique $\sum_{n\geq 0}a_n z^n$ avec
  $\begin{cases} a_{2n}=3^n \\ a_{2n+1}=0 \end{cases}$

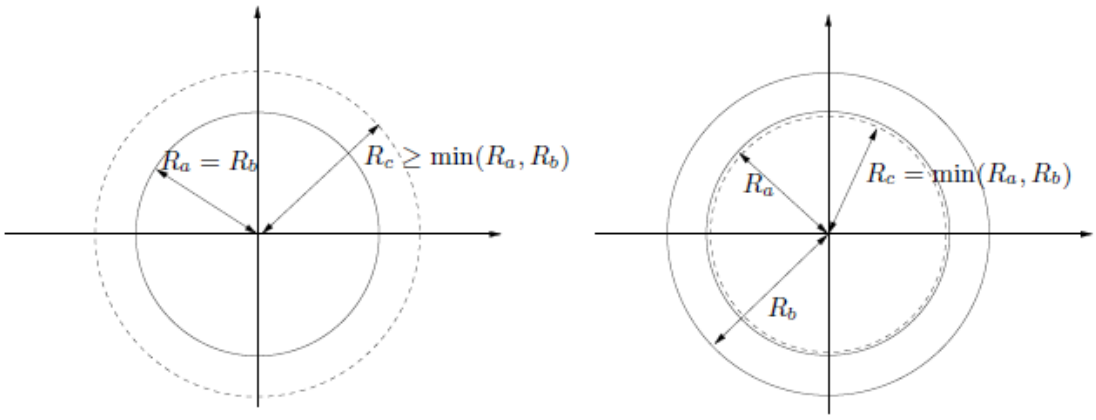
Posons$u_n=3^n x^{2n}, on\ a\ \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=3x^2$. Donc la série converge absolument si $|x|<\frac{1}{\sqrt{3}}$ et diverge grossièrement si $|x|>\frac{1}{\sqrt{3}}$, d'où $R=\frac{1}{\sqrt{3}}$

- La série $\sum_{n\geq 0}z^{n^2}=\sum_{n\geq 0}a_n z^n\ \ avec\ a_n=1\ si\ n\ est\ un\ carré\ parfait, a_n=0\ si\ non.$ On a $\forall n\geq 0, |a_n z^n|\leq|z^n|\ car|a_n|\leq 1$ .ce qui implique que la série converge absolument si $|z|<1$ et diverge grossièrement si $|z|>1$ et donc R=1.

3. Opérations sur les séries entières :

Théorème : Soient $\sum_{n\geq 0}a_n z^n\ \ et\ \sum_{n\geq 0}b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergences $R_a\ et\ R_b$ respectivement.

- ♣ La série somme $\sum_{n\geq 0}(a_n+b_n)z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R_c\geq\min\{R_a,R_b\}$.
- ♣ La série produit $\left(\sum_{n\geq 0}a_n z^n\right)\left(\sum_{n\geq 0}b_n z^n\right)=\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}\right)z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R_c\geq\min\{R_a,R_b\}$.



Rayon de convergence de la série somme.

Preuve : Si $|z| < \min\{R_a, R_b\}$, alors les deux séries sont absolument convergentes, donc $\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)z^n$ l'est aussi. On en déduit que $R_c \geq \min\{R_a, R_b\}$. Si maintenant les rayons diffèrent, par exemple $R_a < R_b$: supposons que $R_c > R_a$, alors il existe z tel que

$R_a < |Z| < R_b \; et \; \sum(a_n + b_n)\, z^n$ convergente. Mais puisque $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ est elle-même convergente, on aurait aussi $\sum(c_n - b_n)z^n = \sum a_n z^n$ convergente : absurde. Donc $R_c = \min\{R_a, R_b\}$.

4. Convergence normale d'une série entière :

Théorème : Soit $R > 0; pour\ tout 0 < r < R$, la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ <u>converge normalement</u> sur <u>tout disque fermé</u> centré en 0 et de rayon r : $\overline{D}(0,r) \subset D(0,R)$.

Preuve : Soit $z \in \overline{D}(0,r)$. Donc $|z| \leq r < R$ et ceci implique l'existence d'un complexe z_0 vérifiant $r < |z_0| < R\ tel\ que\ la\ série\ \sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ converge ($|z_0| < R\ i.e\ z \in domaine\ de\ convergence$).

On a $|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$, comme $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ converge alors $\lim_{n\to+\infty} a_n z_0^n = 0$, ce qui signifie que la suite $(a_n z_0^n)_n$ est bornée par un certain réel M. D'où :

$$|a_n z^n| \leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M\left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n \; avec \; \frac{r}{|z_0|} < 1, donc \sum_{n\geq 0}\left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n \; converge$$

L'inégalité précédente signifie que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur$\overline{D}(0,r)$.

Remarque : Dire que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur tout disque fermé $\overline{D}(0,r) pour\ tout\ r < R$ ne veut pas dire qu'elle converge normalement sur le disque ouvert de convergence$D(0,R)$.

D'où : une série entière <u>converge normalement, donc uniformément</u> sur <u>tout disque fermé</u> centré en 0 <u>inclue dans le disque ouvert de convergence</u>.

II. Continuité, intégration et dérivation d'une série entière :

On considère, dans la suite, la série entière réelle$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

1. Continuité :

Théorème :

- ♣ La somme d'une série entière, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence R est une fonction continue sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.
- ♣ Si la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge pour $x = R$ $(resp. x = -R)$ alors la somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue à gauche de $x = R$ $(resp.$ à $droite\ de\ x = -R)$.

Preuve : Ceci découle du résultat sur les séries de fonctions normalement convergentes.

Soit $0 < r < R$: les fonctions $x \longmapsto a_n x^n$ sont continues sur $[-r, r]$ et la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$converge normalement vers S sur cet l'intervalle, donc S est continue sur $[-r, r]$. Ceci est vrai pour tout $0 < r < R$

Soit maintenant$|x| < R$, prenons $r \in]|x|, R[$: S est continue sur$[-r, r]$, donc en x. Ainsi, S est continue sur$]-R, R[$.

2. Primitive d'une série entière :

Théorème : Toute série entière$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, de rayon de convergence R, possède une primitive sur $]-R, R[$ donnée par $F(x) = c + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$: qui est série entière de <u>même rayon</u> de convergence R.

Exemple : La série entière $\sum_{n\geq 0}(-x^2)^n$ a pour somme$\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}, \forall x \in]-1,1[$. Donc $\forall x \in]-1,1[;\ \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = arctg(x), \forall x \in]-1,1[$. La série $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est une série alternée convergente, i.e. $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ converge pour x=1, donc et d'après le théorème de continuité, la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = arctg(x)$ est continue sur $]-1,1]\ et\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = arctg(1) = \frac{\pi}{4}$

3. Dérivée d'une série entière :

Théorème : Toute série entière$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, de rayon de convergence R, est dérivable sur $]-R, R[$ sa dérivée $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1) a_{n+1} x^n$ qui est série entière de <u>même rayon</u> de convergence R.

Exemple : $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \forall x \in]-1,1[\Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \forall x \in]-1,1[$

Généralisation : En partant de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence R, on a

$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ de même rayon de convergence R,

$f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ de même rayon de convergence R,

$f^{(3)}(x) = \sum_{n=3}^{+\infty} n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3}$ de même rayon de convergence R,…

Ces formules donnent respectivement $f(0) = a_0, f'(0) = a_1, f''(0) = 2a_2, f^{(3)}(0) = 3!\, a_3, \ldots$

Théorème : La somme d'une série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence R, est une fonction de classe C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$; sa dérivée d'ordre p est une série entière, de même rayon de convergence, s'obtient en dérivant les termes de la série p fois, et on a $f^{(p)}(0) = p!\, a_p \; et \; f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

Remarque : Les conditions précédentes ne sont pas suffisantes pour dire qu'une fonction est développable en série entière, en effet : la fonction $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \; si \; x \neq 0 \\ 0 \; si \; x = 0 \end{cases}$

Est de classe$C^\infty(\mathbb{R}^*)$, et par récurrence on montre qu'elle est indéfiniment dérivable en 0 et que$f^{(n)}(0) = 0, \forall n \geq 1$. D'où$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 \; pour \; tout \; x$, mais $f \not\equiv 0$ sur$\mathbb{R}$. Ainsi cette fonction n'est pas développable en série entière autour de 0.

III. Fonctions développables en séries entières :

Définition : Une fonction$f$, définie sur un intervalle contenant 0, est dite <u>développable en série entière</u> autour de 0 s'il existe un intervalle $]-r, r[, r > 0$ et une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ définie sur $]-r, r[$ telle que$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \; pour \; tout \; x \in]-r, r[$.

Proposition : Si f est développable en série entière autour de 0, alors$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.
Ce développement est dit de Taylor.

Théorème : « condition suffisante » : Soit f une fonction $C^\infty(]-r, r[)$ vérifiant la condition suivante :

$$\exists M > 0, \forall n \geq 1, \forall x \in]-r, r[; \; \left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$$

Alors, pour tout $x \in]-r, r[$, la fonction f est somme de la série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Qui est de rayon de convergence supérieur ou égale à r.

<u>S'il existe</u>, un <u>développement en série entière</u> autour de0, <u>est unique</u>.

Proposition : Soient $f \; et \; g$ deux fonctions développables en séries entière autour de 0 ;

$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. Alors :

- $(f + g)$ est développable en série entière autour de 0, et $(f + g)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n$.
- (fg) est développable en série entière autour de 0, et $(fg)(x) = (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n)$.
- f' est développable en série entière autour de 0, et $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$
- F, la primitive de f, est développable en série entière autour de 0,

et $F(x) = F(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$

- Si la fonction est paire, alors$a_{2n+1} = 0, \forall n \geq 0$.
- Si la fonction est impaire, alors$a_{2n} = 0, \forall n \geq 0$.

Exemples fondamentaux :

1) $f(x) = e^x \; est \; C^\infty(\mathbb{R}), et \; \forall n \geq 1, (e^x)^{(n)} = e^x$ est majoré sur tout intervalle $]-r, r[$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, R = +\infty$$

2) $f(x) = \cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, est \; C^\infty(\mathbb{R})$, dont toutes les dérivées sont majorées par 1.

$$\cos x = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i^n + (-i)^n)x^n}{n!}, R = +\infty$$

$$(i^n + (-i)^n) = \begin{cases} 2(-1)^p \; si \; n = 2p \\ 0 \; si \; n = 2p+1 \end{cases}$$

D'où $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, R = +\infty$

3) $f(x) = \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}, est \; C^\infty(\mathbb{R})$, dont toutes les dérivées sont majorées par 1.

$$\sin x = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i^n - (-i)^n)x^n}{n!}, R = +\infty$$

$$(i^n - (-i)^n) = \begin{cases} 0 \; si \; n = 2p \\ 2i(-1)^p si \; n = 2p+1 \end{cases}$$

D'où $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, R = +\infty$

4) $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \forall x \in]-1,1[$, en intégrant terme à terme sur le domaine de convergence, on obtient : $-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \forall x \in]-1,1[$

5) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}, \forall x \in]-1,1[$, en intégrant terme à terme sur le domaine de convergence, on obtient : $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \forall x \in]-1,1[$

Exercice : Développer en série entière autour de 0 :

$$f(z) = \frac{1}{1+z+z^2}, g(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$$

5. Application aux équations différentielles ordinaires :

On peut parfois exprimer, au moyen de leur développement en série entière, des solutions d'une équation différentielle. Expliquons cela en traitant un exemple :

Exemple : Soit l'équation différentielle: $4xy'' + 2y' - y = 0, avec \; y(0) = 1$.

Cherchons les solutions sous forme de série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ donc

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

Et $y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \Longrightarrow xy''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n$

Notre équation différentielle devient :

$4\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$

Donc $\sum_{n=0}^{+\infty}[4n(n+1)a_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1} - a_n]x^n = 0$

Ce qui implique $\forall n \geq 0, 4n(n+1)a_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1} - a_n = 0$

$$a_{n+1} = -\frac{a_n}{2(n+1)(2n+1)}, \forall n \geq 0$$

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{2n(2n-1)}, \forall n \geq 1$$

$$\begin{cases} a_1 = -\dfrac{a_0}{2} \\ a_2 = -\dfrac{a_1}{4.3} = (-1)^2\dfrac{a_0}{4!} \\ a_n = (-1)^n\dfrac{a_0}{(2n)!} \end{cases}$$

Or $a_0 = y(0) = 1\ donc\ y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n, R = \infty$

Complément de cours

Fonctions usuelles complexes :

1. **Exponentielle complexe :**
   Définition : On appelle exponentielle complexe, noté $exp: z \longmapsto e^z$, la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ qui est de rayon de convergence infini.
   $$\forall z \in \mathbb{C}, \exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$
   Proposition :
   - $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C};\ e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$
   - $\forall z \in \mathbb{C};\ e^z \neq 0\ et\ \frac{1}{e^z} = e^{-z}$
   - $\forall z \in \mathbb{C};\ \overline{e^z} = e^{\overline{z}}\ et\ |e^z| = e^{Re(z)}$
   - $\forall z \in \mathbb{C};\ |e^z| = 1 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$
2. **Logarithme complexe :**
   Proposition : il existe une unique fonction continue φ, définie sur le plan complexe privé du demi axe réel négatif telle que $\varphi(1) = 0\ et\ pour\ tout\ z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-\ on\ a\ e^{\varphi(z)} = z$.
   Cette fonction est appelée détermination principale du logarithme notée : $z \longmapsto Ln(z)$ et coïncide avec la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$
   Pour tout complexe:$z = x + iy = |z|\, e^{i\theta}\ tel\ que\ \theta = \arg(z)$, on a
   $$Ln(z) = ln|z| + i(\arg(z) + 2k\pi); k \in \mathbb{Z}$$
   $$\forall z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\ on\ a \ln(1+z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}$$
3. **Fonctions trigonométriques et trigonométrique hyperbolique :**
   - $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$
   - $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
   - $\cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$
   - $\sinh z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
   - $\forall z \in \mathbb{C};\ cos^2(z) + sin^2(z) = 1$

Attention :

Il faut prendre garde du fait que les inégalités bien pratiques$|\cos z| \leq 1\ et\ |\sin z| \leq 1$ ne sont vérifiées que si z est réel.

Liste des sommes des séries entières usuelles

Formule	Rayon de convergence	Ensemble de validité de la formule
$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	∞	$\mathbb{R}$
$Ch\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	∞	$\mathbb{R}$
$Sh\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	∞	$\mathbb{R}$
$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	∞	$\mathbb{R}$
$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	∞	$\mathbb{R}$
$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	1 (∞ si $\alpha \in \mathbb{N}$)	]-1,1[($\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$)
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	1	]-1,1[
$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$	1	]-1,1[
$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$	1	[-1,1[
$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$	1	]-1,1]
$Arctg\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$	1	[-1,1]
$Argth\, x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$	1	]-1,1[
$Arcsin\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!\, x^{2n+1}}{(2^n n!)^2 (2n+1)}$	1	[-1,1]
$Argsh\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!\, x^{2n+1}}{(2^n n!)^2 (2n+1)}$	1	[-1,1]