Chapitre 02 : Séries numériques

Introduction : La théorie des séries à pour but de donner si possible un sens à la somme d'une infinité de nombres. Supposons que l'on dispose d'un gâteau et d'un couteau parfait permettant de couper sans jamais en perdre une miette!. Si l'on commence par manger la moitié du gâteau puis la moitié de ce qui reste et ainsi e suite indéfiniment, personne ne doute que l'on finira par manger tout le gâteau. Et si on note u_1 la fraction de gâteaux mangée la première fois$\left(u_1 = \frac{1}{2}\right)$, u_2 la fraction de gâteau mangée la deuxième fois $\left(u_2 = \frac{1}{2}u_1 = \frac{1}{4}\right)$, et d'une façon générale u_n la fraction de gâteau mangée la n^{ème} fois. Dire que l'on a tout mangé signifie que si on fait la somme de $u_1, u_2, \dots u_n, \dots$on trouvera 1, qu'on notera: $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.

Paradoxe de Zénon : Une course est organisée entre une personne et une tortue, au départ la tortue possède 10 mètres d'avance sur la personne ; mais la tortue se déplace à 1 mètre par seconde alors que la personne court à 10 mètres par seconde. La personne ne rattrapera jamais la tortue. En effet ; la personne va d'abord parcourir les 10 mètres de retard qu'il possède sur la tortue, mais quand il y arrivera, la tortue aura avancé d'une certaine distance (1 mètre), et quand la personne aura parcouru ce mètre de retard, la tortue aura encore avancé d'une certaine distance et ainsi de suite. La personne n'aura jamais terminé de parcourir les retards successifs. Comme il y a une infinité d'étapes on a tendance à croire que l'ensemble de ces étapes va durer un temps infini, or ce n'est pas le cas : <u>la somme d'une infinité de nombres positifs n'est pas nécessairement infinie</u>. En effet ; la personne met une seconde pour parcourir les 10 mètres le séparant initialement de la tortue, puis $\frac{1}{10}$ seconde pour parcourir le mètre d'avance, puis $\frac{1}{100}$ seconde pour parcourir le $\frac{1}{10}$mètre que la tortue possède comme avance…

Ainsi le temps mis par la personne pour rattraper le retard vaut :

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n}$$

I. Définitions et propriétés :

Définition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et pour chaque$n \in \mathbb{N}$, soit $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ la somme de (n+1) premiers termes de cette suite.

- La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée série de terme général u_n, cette série sera notée $\sum_n u_n \; ou \; \sum u_n$.
- $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est dite somme partielle d'ordre n de la série.
- On dit que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, dans ce cas $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$ est appelée <u>somme de la série</u> $\sum u_n$, et désignée par $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- Une série est dite divergente si elle n'est pas convergente.

Exemples :

- **Série géométrique** : $\sum_n r^n$, sa somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = \begin{cases} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \; pour \; r \neq 1 \\ (n+1) \; si \; r = 1 \end{cases}$.

  Et sa somme $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \begin{cases} \frac{1}{1-r} \; si \; |r| < 1 \\ pas \; de \; limite \; si \; r \leq -1 \\ +\infty \; si \; r \geq 1 \end{cases}$

  D'où la série géométrique converge pour$|r| < 1$.
- Si on revient à l'exemple du gâteau (donné dans l'introduction) :

  $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}, d'où \; S = \lim_{n\to+\infty} S_n = 1$
- Et pour le paradoxe de Zénon : $S_n = \sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{10})^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{10}{9}$ donc la personne rattrape son retard au bout de $\frac{10}{9}$ secondes.

Reste d'une série convergente :

Si la série du terme général u_n est convergente, et de somme$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, la différence $S - S_n$ s'appelle <u>reste</u> d'ordre n de la série. On le note :

$$R_n = s - S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Proposition 01 : Si la série $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

<u>En effet</u> : $R_n = s - S_n$ donc $\lim_{n\to+\infty} R_n = \lim_{n\to+\infty} S - S_n = S - S = 0$(car la série $\sum u_n$ converge et $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$).

Proposition 02 : Si la série $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Donc si $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ alors la série $\sum u_n$ diverge.

<u>En effet</u> : On a $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = S_{n-1} + u_n$ d'où $u_n = S_n - S_{n-1}$. Si la série converge la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$converge, et donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$

Remarque : Cette condition est une condition nécessaire qui n'est pas suffisante, car il existe des séries divergentes et dont les termes généraux tendent vers 0 à l'infinie.

Contre exemples :

- La série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ est une série divergente, car $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1) - \ln k) = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$ bien que la limite de son terme général est nulle : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0$
- La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$, dite <u>série</u> <u>harmonique</u>, est une série divergente bien que son terme général $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, en effet : On a $\forall k \geq 1, \frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \implies \forall k \geq 1, \frac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln k$ i.e
$$\begin{cases} 1 \geq \ln 2 - \ln 1 \\ \frac{1}{2} \geq \ln 3 - \ln 2 \\ \frac{1}{n} \geq \ln(n+1) - \ln n \end{cases}$$

D'où $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \ln(n+1) \implies \lim_{n\to+\infty} S_n \geq \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$ ce qui montre que la série harmonique diverge. On peut montrer sa divergence en montrant que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy.

Proposition 03 : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série de terme général $(a_{n+1} - a_n)$ converge, i.e.

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\ suite\ convergente \Leftrightarrow \sum(a_{n+1} - a_n)\ série\ convergente$$

Preuve : La somme partielle de la série $\sum(a_{n+1} - a_n)$ est $S_n = \sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0$

Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on note sa limite $l = \lim_{n\to+\infty} a_n$, alors $\lim_{n\to+\infty} S_n = l - a_0$ ce qui prouve que la série $\sum(a_{n+1} - a_n)$ converge.

Et si on suppose que la série $\sum(a_{n+1} - a_n)$ converge vers S, on a

$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} S_n + a_0 = S + a_0$. Ce qui prouve que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exemples :

1) Soit la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$, on a $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
La suite $(a_n)_{n\geq 1}\ avec\ a_n = \frac{1}{n}$ converge donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge, en plus :
$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \implies S = \lim_{n\to+\infty} S_n = 1.$
2) Soit la série $\sum_{n\geq 0} u_n\ avec\ u_n = Arctg\,\frac{1}{1+n+n^2}$
$Arctg\,\frac{1}{1+n+n^2} = arctg\left(\frac{(n+1)-n}{1+n(n+1)}\right) = arctg(n+1) - arctg(n)$, la suite $(Arctg(n))_{n\geq 0}$ converge donc la série $\sum_{n\geq 0} u_n\ avec\ u_n = Arctg\,\frac{1}{1+n+n^2}$ converge, et sa somme S
$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n}(arctg(k+1) - arctg(k)) = \lim_{n\to+\infty} arctg(n+1) = \frac{\pi}{2}$

Propriétés et opérations sur les séries :

Proposition 01 : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries, on suppose qu'elles ne diffèrent que par un nombre fini de termes (i.e. il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout$n \geq p$ $on\ a\ u_n = v_n$) alors les deux séries sont de même nature.

Preuve : Soit $n \geq p$, posons :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k = S_p + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{p} v_k + \sum_{k=p+1}^{n} v_k = T_p + \sum_{k=p+1}^{n} v_k$$

La différence $S_n - T_n = S_p - T_p$ est une constante, alors

$$\sum u_n\ converge \Leftrightarrow (S_n)_n\ converge \Leftrightarrow (T_n)_n\ converge \Leftrightarrow \sum v_n\ converge$$

Remarque :

- Cette proposition permet de dire que les séries sont de même nature (on parle de nature d'une série pour désigner sa convergence ou sa divergence) mais en cas de convergence, elles n'ont pas nécessairement la même somme.
- On ne change pas la nature d'une série si on lui rajoute ou on lui retranche un nombre fini de termes.
- Se méfier du symbole de sommation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$: ce n'est pas une somme au sens usuel, car elle <u>n'est pas commutative en général</u>.
- Les sommes partielles d'une série sont toujours définies, mais les restes ne le sont que lorsque la série converge.

Proposition 02 : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques et α un scalaire non nul :

- Si $\sum u_n$ converge vers s, et $\sum v_n$ converge vers l alors la série $\sum(u_n + v_n)$ converge vers (s+l).
- Si $\sum u_n$ converge vers s alors $\sum \alpha . u_n$ converge vers αs.
- Si$\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge alors la série $\sum(u_n + v_n)$ diverge

Preuve : exercice.

Remarque : Si les deux séries sont divergentes, on ne peut rien dire sur la nature de leur somme. Par exemple :

- Les séries $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\ et\ \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1}$ divergent, et pourtant on a montré que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n\geq 1}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$ converge.
- Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ telles que$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_n = -1 \end{cases}$, les deux séries divergent, mais la série $\sum(u_n + v_n)$ converge.

- Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ telles que $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_n = 1 \end{cases}$, les deux séries divergent, et la série $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

Proposition 03 : Soit $\sum u_n$ une série à termes complexes

$$\sum u_n \ converge \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sum Re(u_n) \ converge \\ \sum Im(u_n) converge \end{pmatrix} \Leftrightarrow \sum \overline{u_n} \ converge$$

II. Séries à termes positifs :

On appelle $\sum u_n$ une série à termes réels positifs toute série vérifiant : $u_n \geq 0 \ pour \ tout \ n \in \mathbb{N}$. Les séries vérifiant $u_n \geq 0 \ pour \ tout \ n \geq n_0$ sont aussi appelées séries à termes positifs car la nature d'une série ne change pas si on lui retranche un nombre fini de termes.

Si on note $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, alors \ S_n - S_{n-1} = u_n \geq 0$. Donc la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, ce qui entraine que : si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée alors elle converge (i.e. la série $\sum u_n$ converge), et si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ et la série $\sum u_n$ diverge.

Proposition 01 : une série à termes positifs converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Théorème de comparaison avec son intégrale :

Théorème : Une série dont le terme général est de la forme $u_n = f(n)$; où f est une fonction continue, positive et décroissante vers 0 ; est de même nature que la suite $\left(\int_1^n f(x)dx\right)_n$.
$\sum u_n \ converge \ \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}(\int_1^n f(x)dx) \ existe.$

Preuve : Supposons que $u_n = f(n)$; où f est une fonction continue, positive et décroissante vers 0 à partir de n=1. Sur chaque segment $[n, n+1]$ on a $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$,

d'où $\int_n^{n+1} f(n+1)dx \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq \int_n^{n+1} f(n)dx \Longrightarrow f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n)$

Comme $\int_1^{n+1} f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx \ + \int_2^3 f(x)dx \ + \cdots + \int_n^{n+1} f(x)dx$

On aura $f(2) + f(3) + \cdots + f(n+1) \leq \ \int_1^{n+1} f(x)dx \leq f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$

Or $f(n) = u_n, \forall n \geq 1, i.e$:

$$S_{n+1} - u_1 = u_2 + u_3 + \cdots + u_{n+1} \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq u_1 + u_2 + \cdots + u_n = S_n$$

- Si $\lim_{n\to+\infty}(\int_1^n f(x)dx) \ existe$, on a
  $S_{n+1} \leq \ \int_1^{n+1} f(x)dx + u_1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_{n+1} \leq u_1 + \lim_{n\to+\infty}(\int_1^n f(x)dx)$ i.e $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ainsi la série $\sum u_n \ converge$.

- Et si $\lim_{n\to+\infty}(\int_1^n f(x)dx) = +\infty$ (car f est positive), on a $\int_1^{n+1} f(x)dx \leq S_n$ ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n \geq \lim_{n\to+\infty}(\int_1^n f(x)dx) = +\infty$ et que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$diverge.

Inversement si la série converge, $\lim_{n\to+\infty}(\int_1^n f(x)dx)$existe, et si la série diverge, la limite $\lim_{n\to+\infty}(\int_1^n f(x)dx) = +\infty$.

Remarque : la condition $u_n = f(n)$; où f est une fonction continue, positive et décroissante vers 0 ; n'a pas besoin d'être vraie à partir de n=1 il suffit qu'elle soit vérifiée à partir d'un certain rang. La condition f <u>positive</u> peut être remplacée par une fonction de <u>signe constant.</u>

Exemple fondamental : « série de Riemann »

Une série dite de Riemann est de la forme : $\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^\alpha}$

- <u>Si $\alpha \leq 0$</u> : la série de Riemann $\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^\alpha}$ diverge car $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^\alpha} \neq 0$.
- <u>Si > 0:</u> $u_n = \frac{1}{n^\alpha} = f(n), \forall n \geq 1, f$ est positive ; décroissante et $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^\alpha} = 0$. D'après le théorème de comparaison avec son intégrale, la série $\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\lim_{n\to+\infty}(\int_1^n f(x)dx)$ existe.

Or $\int_1^n f(x)dx = \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}dx = \left[\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\right]_1^n = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1\right]\ si\ \alpha \neq 1, et \int_1^n f(x)dx = \ln n\ si\ \alpha = 1$

Donc $\lim_{n\to+\infty}(\int_1^n f(x)dx) = \begin{cases}\frac{1}{\alpha-1}\ si\ \alpha > 1\\ +\infty\ si\ \alpha \leq 1\end{cases}$

<u>Résultat :</u> la série de Riemann $\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$, et diverge $si\ \alpha \leq 1$.

Proposition : « encadrement du reste » Le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$d'une série convergente de terme général $u_n = f(n)$; où f est une fonction continue, positive et décroissante vers 0 ; vérifie l'encadrement $\int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(x)dx$

Exemple : Quelle erreur commet-on en approchant la somme $S = \sum_1^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ par la somme partielle d'ordre n de la série ?

On sait que $R_n = s - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$, qui est compris entre $\int_{n+1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{n+1}$ et $\int_n^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{n}$

Pour obtenir 3 chiffres exacts, on prend la somme partielle d'ordre n=1000, en fait $S_{1000} = 1.64393$ et $S = \frac{\pi^2}{6} = 1.6449$.

Théorèmes de comparaison de deux séries à termes positifs :

Théorème 01 : Soient $\sum u_n\ et\ \sum v_n$ deux séries vérifiant $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang n_0.

- Si la série $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k$
- Si la série $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Exemple :

1) Soit la série $\sum_{n\geq1}\frac{|\cos n|}{n^2}$, son terme général $u_n = \frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ or $\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc $\sum_{n\geq1}\frac{|\cos n|}{n^2}$ converge aussi.

2) La série $\sum_{n\geq 1}\frac{3+\sin(\ln n)}{n}$ est une série à termes positifs telle que $\forall n \geq 1, \frac{3+\sin(\ln n)}{n} \geq \frac{3}{n}$, comme $\sum_{n\geq 1}\frac{3}{n}$ est (la série harmonique) divergente, alors $\sum_{n\geq 1}\frac{3+\sin(\ln n)}{n}$ diverge aussi.

Théorème 02 : Etant donné deux séries à termes positifs, dont les termes généraux u_n et v_n sont équivalent à l'infinie ($u_n \sim v_n$ *au voisinage de* $+\infty$). Alors $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ sont de même nature :
$\sum u_n$ *converge* $\Leftrightarrow$ $\sum v_n$ *converge*
$\sum u_n$ *diverge* $\Leftrightarrow$ $\sum v_n$ *diverge*

Exemple : Soit la série $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. On a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim e$ *quand* $n \in V(+\infty)$, d'où $\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim \left(\frac{2}{3}\right)^n e$, comme $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ est une série géométrique convergente alors la série $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est convergente aussi.

Règle de Riemann : Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On suppose que $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tels que $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = l$.

- Si $l \neq +\infty$ *et* $\alpha > 1$ alors $\sum u_n$ converge.
- Si $l \neq 0$ *et* $\alpha \leq 1$ alors $\sum u_n$ diverge.

Preuve :

- Si $l \neq +\infty$ *et* $\alpha > 1$: $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = l$ signifie que $u_n \sim \frac{l}{n^\alpha}$ *or* $\sum_{n\geq 1}\frac{l}{n^\alpha}$ est une série de Riemann convergente (car $\alpha > 1$) donc $\sum u_n$ converge.
- Si $l = +\infty$ *et* $\alpha \leq 1$:

$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = l \Longrightarrow \exists N$*entier tel que* $n \geq N \Longrightarrow n^\alpha u_n \geq 1$ *i.e* $u_n \geq \frac{1}{n^\alpha}$, comme $\sum_{n\geq 1}\frac{l}{n^\alpha}$ diverge ($\alpha \leq 1$) alors $\sum u_n$ diverge.

Si $l \in \mathbb{R}^*$ *et* $\alpha \leq 1$: on a $u_n \sim \frac{l}{n^\alpha}$ et comme $\sum_{n\geq 1}\frac{l}{n^\alpha}$ diverge ($\alpha \leq 1$) alors $\sum u_n$ diverge.

Exemple : Etudions la nature de la série : $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{(\ln n)^2}$

$\lim_{n\to+\infty} n\frac{1}{(\ln n)^2} = +\infty$ Donc $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{(\ln n)^2}$ diverge.

Règle de D'Alembert : Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Notons $l = \lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *tel que* $l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

- Si $l < 1$ la série $\sum u_n$ converge.
- Si $l > 1$ la série $\sum u_n$ diverge.
- Si $l = 1$, on ne peut rien conclure.

Exemple :

- Soit la série $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}$ de terme général $u_n = \frac{1}{n!}$, donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1$ d'où la série converge d'après le critère de D'Alembert.

- Pour la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ on a $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1$, donc on ne peut rien conclure en appliquant le critère de D'Alembert, bien qu'on a déjà démontré sa divergence.
- La série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente et $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$.

Règle de Cauchy : Soit la série positive de terme général u_n. Notons $l=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}\ tel\ que\quad l\in\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$

- Si $l<1$ la série $\sum u_n$ converge.
- Si $l>1$ la série $\sum u_n$ diverge.
- Si $l=1$: cas de doute, on ne peut rien conclure.

Exemple : Soit $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n^2}$. On a $\sqrt[n]{u_n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{e}<1$ donc la série converge.

Corollaire : Si $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$ alors $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$,

et si $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=+\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=+\infty$

Donc si on tombe sur le cas de doute en appliquant la règle de D'Alembert, il ne faut pas appliquer la règle de Cauchy car on ne pourra rien conclure aussi.

Règle de Raabe-Duhamel : Soit $u_n\geq 0,\forall n\geq n_0$ et notons $l=\lim_{n\to+\infty}n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)$où $l\in\mathbb{R}$.

Alors $\begin{cases} si\ l>1\Longrightarrow \text{la série } \sum u_n \text{ converge}\\ si\ l<1\Longrightarrow \text{la série } \sum u_n \text{ diverge}\end{cases}$

Exemple : Considérons une nouvelle fois la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$. La limite $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$, le critère de D'Alembert ne permet pas de conclure sa nature, appliquons donc la règle de Raabe-Duhamel : $\lim_{n\to+\infty}n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to+\infty}n\left(\frac{1+2n}{n^2}\right)=2>1$ ce qui prouve la convergence de la série.

Règle de Gauss :

Soit $u_n>0,\forall n\geq n_0$, on suppose que $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}\times]1,+\infty[tels\ que\ \frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$.

Alors : $\exists k\in\mathbb{R}_+^*\ tel\ que\ u_n\sim\frac{k}{n^\alpha}$ lorsque n tend vers l'infinie i.e. $\begin{cases} si\ \alpha>1\Longrightarrow \text{la série } \sum u_n \text{ converge}\\ si\ \alpha\leq 1\Longrightarrow \text{la série } \sum u_n \text{ diverge}\end{cases}$

Exemple : Soit $\sum u_n$ avec $u_n=\sqrt{n!}\sin 1\sin\frac{1}{\sqrt{2}}\dots\sin\frac{1}{\sqrt{n}},\forall n\geq 1$.

$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{1}{6n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\ d'o\grave{u}\alpha=\frac{1}{6}<1$ Ce qui prouve que la série diverge.

III. Séries à termes quelconques :

Séries absolument convergente :

Définition : On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente lorsque $\sum |u_n|$ converge.

Exemple : La série $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n e^{in}}{n^2+n}$ converge absolument car le module du terme général est égal à $\frac{1}{n^2+n}$ qu'on peut majorer par $\frac{1}{n^2}$

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$ n'est pas absolument convergente, car $\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \frac{1}{n+1}$ et $\sum \frac{1}{n+1}$ diverge.

Lemme : Toute série absolument convergente est convergente.

Définition : On dit la série $\sum u_n$ est semi-convergente lorsque$\sum u_n$converge mais $\sum |u_n|$ diverge

Règles de D'Alembert et de Cauchy pour les séries à termes quelconques :

<u>Règle 1 :</u> Soit $l = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$

- Si $l < 1 \Longrightarrow \sum u_n$ converge absolument
- Si $l > 1 \Longrightarrow \sum u_n$ ne converge pas absolument
- Si $l = 1$: cas de doute.

<u>Règle 2 :</u> Soit $l = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$

- Si $l < 1 \Longrightarrow \sum u_n$ converge absolument
- Si $l > 1 \Longrightarrow \sum u_n$ ne converge pas absolument
- Si $l = 1$: cas de doute.

Critère d'Abel :

Théorème : Soit la série $\sum u_n$ tel que $u_n = a_n b_n$, avec

- La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante vers 0.
- $\exists M \; constante \; tq \; \forall\, n \in \mathbb{N};\; |\sum_{k=0}^{n} b_k| \leq M$

Alors la série $\sum u_n$ converge.

Exemples fondamentaux :

<u>Exemple 1 :</u> Séries de la forme $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^\alpha}$ ou $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$ $où\; x \in \mathbb{R} \setminus \{2m\pi; m \in \mathbb{Z}\}\; et\; \alpha > 0.$

Notons $A = 1 + e^{ix} + e^{i2x} + \cdots + e^{inx} = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} = e^{in\frac{x}{2}} \frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin\frac{x}{2}}$

Ce qui donne $1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = Re(A) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin\frac{x}{2}}$

Et $1+\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx = Im(A) = \sin\left(\frac{nx}{2}\right)\frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin\frac{x}{2}}$

D'où $|1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$ et $|1+\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$

Ces majorations sont indépendantes de n, donc on peut appliquer le critère d'Abel pour démontrer la convergence des séries $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(nx)}{n^\alpha}$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$ sachant que la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\geq 1}$ est positive, décroissante vers 0 pour tout $\alpha > 0$ et $x \neq 2m\pi$. En plus pour $\alpha > 1$, les séries converge absolument.

<u>Résultat :</u>

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(nx)}{n^\alpha}\ converge\ pour\ \alpha > 0\ et\ x \neq 0[2\pi]$$
$$\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(nx)}{n^\alpha}\ converge\ pour\ \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

<u>Exemple 2 : Séries alternées</u>

Définition : On appelle $\sum u_n$ série alternée une série dont le terme général est alternativement positif puis négatif i.e. $u_n = (-1)^n a_n\ tq\ a_n \geq 0, \forall n \geq 0$

Corollaire : (critère de Leibnitz) Toute série alternée $\sum(-1)^n a_n$ dont la valeur absolue du terme général décroit vers 0 est convergente

En effet : Pour tout entier n, $\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\right| \leq 2$, si de plus la suite $(a_n)_n$ est décroissante vers 0, alors $\sum(-1)^n a_n$ converge d'après le critère d'Abel.

Cas particulier : La série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ est une série alternée convergente pour $\alpha > 0$. D'ailleurs la série est semi-convergente pour $0 < \alpha \leq 1$ et absolument convergente pour $\alpha > 1$.

Proposition : Le reste d'ordre n d'une série alternée convergente est majoré par :

$|R_n| = |\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k| \leq |u_{n+1}|$

Exemple : Trouvons un entier n tel que la somme partielle S_n approche la somme de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^3}$ à moins de 10^{-6} près.

Cette série est une série alternée absolument convergente, donc $|R_n| \leq \frac{1}{(n+1)^3} < 10^{-6} \Longrightarrow n \geq 100$.

Utilisation du développement asymptotique :

C'est une technique très utilisée pour les séries à termes quelconques pour lesquelles les critères précédents ne s'appliquent pas. Dans de nombreuses situations, on conclut sur la nature d'une série en se ramenant à une série plus simple, pour les séries à termes positifs par exemple, il suffit de se ramener à un équivalent, ceci n'est plus le cas avec les séries à termes quelconques. Par ailleurs, un équivalent correspond à une approximation au premier ordre, laquelle ne permet pas forcément de conclure. Dans ces cas, il suffit de donner un développement asymptotique du terme général.

Exemple : Soit la série$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$, la suite $(|u_n|)_{n\geq 2}$ n'est pas décroissante donc on ne peut pas appliquer le critère d'Abel. Mais on a $u_n = \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n}}$ $avec$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$, dans ce cas on peut utiliser le développement limité de $\frac{1}{1+u}$ au voisinage de 0 :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n}} = \frac{(-1)^n}{n}\left[1 - \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

D'où $u_n = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$, on a :

$$\begin{cases} \sum \frac{(-1)^n}{n} \ est\ une\ série\ alternée\ convergente \\ \sum \frac{1}{n^2} \ est\ une\ série\ de\ Riemann\ convergente \\ \sum \frac{(-1)^n}{n^3} \ est\ une\ série\ alternée\ absolument\ convergente \end{cases}$$

Notation de Landau : On dit qu'une fonction f est un $O(x^k)$ au voisinage de 0, s'il existe $C_1 > 0\ et\ C_2 > 0$ tels que, au voisinage de 0, on ait $C_1 \left|x^k\right| \leq |f(x)| \leq C_2\left|x^k\right|$

D'où $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ est le terme général d'une série absolument convergente, alors la série $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ converge.

Remarque : En utilisant le développement asymptotique; il faut développer à un ordre suffisamment élevé pour obtenir un reste <u>absolument convergent</u>.

IV. Produit de Cauchy de deux séries :

Définition : Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries numériques. On appelle produit de Cauchy de $\sum a_n$ et $\sum b_n$ la série $\sum c_n$ où pour tout n entier ; $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ ou $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$

Théorème 01 : Le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est absolument convergent.

Théorème 02 : Le produit de Cauchy d'une série absolument convergente et une série convergente est convergent.

Remarque : Le produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est pas nécessairement convergent.

Exemple 1 : La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série alternée convergente. On va calculer le produit de Cauchy de cette série par elle-même : $\left(\sum_{n\geq 1} \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{a_n}\right)\left(\sum_{n\geq 1} \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{b_n}\right) = \sum_{n\geq 1} c_n$

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_k b_{n-k+1} + a_n b_1 = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2}\sqrt{n-1}} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

Or $\forall k = \overline{1,n};\ \sqrt{k}\sqrt{n-k+1} \leq n$ ce qui implique $\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}} \geq \frac{1}{n}$

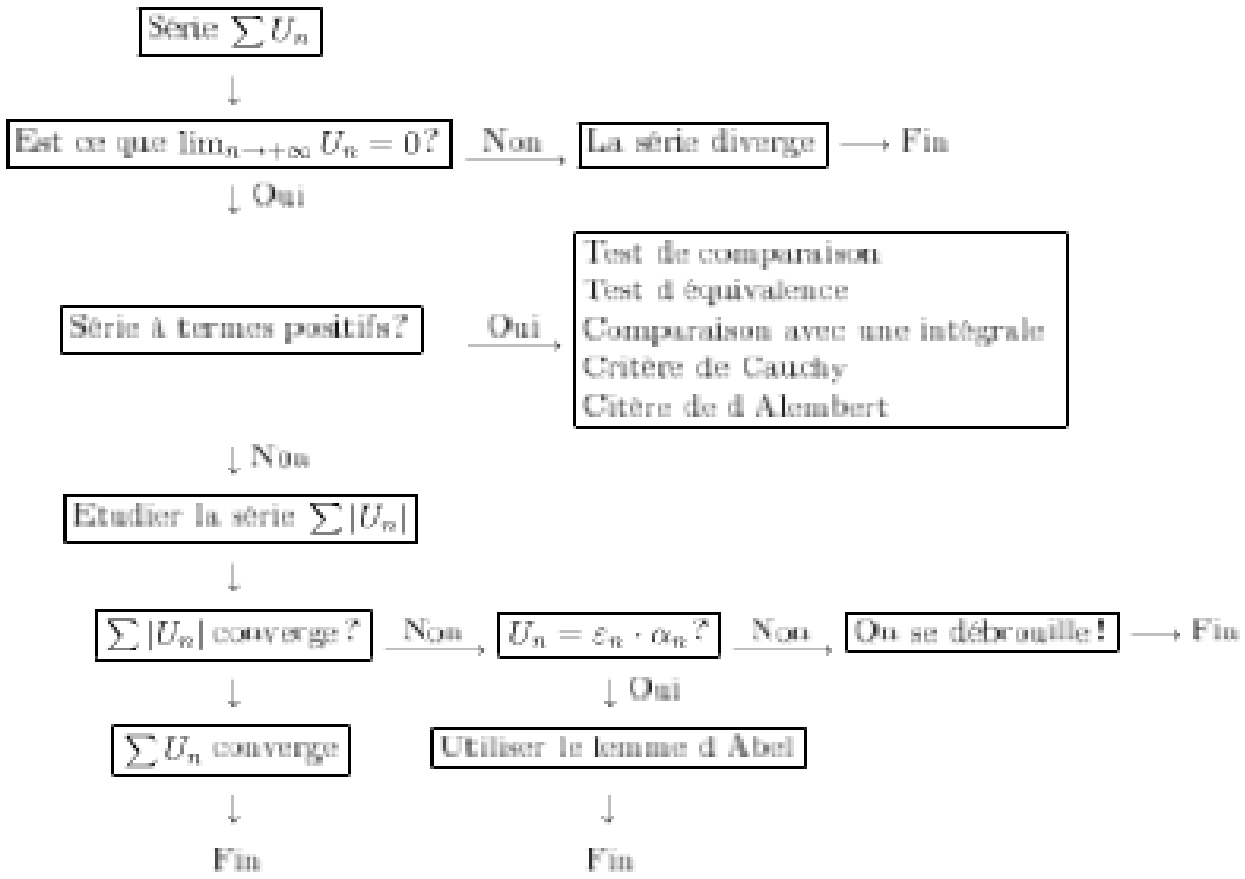
D'où $|c_n| \geq n.\frac{1}{n} = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}|c_n| \neq 0$, ce qui signifie $\sum_{n\geq 1} c_n$ diverge.

Exemple 02 : Considérons maintenant la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$ qui est une série alternée convergente. Le produit de Cauchy de cette série par elle-même converge aussi, en effet :

$$\left(\sum_{n\geq 1}\underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{a_n}\right)\left(\sum_{n\geq 1}\underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{b_n}\right) = \sum_{n\geq 1} c_n$$

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_k b_{n-k+1} + a_n b_1 = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{2(n-1)} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{k(n-k+1)} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

On a $\frac{1}{k(n-k+1)} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right)$ $\forall k = \overline{1,n}$, donc

$$c_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n+1}\left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right] = (-1)^{n+1}\underbrace{\frac{2}{n+1}\left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right]}_{\alpha_n}$$

La suite $(\alpha_n)_n$ est positive décroissante vers 0, donc la série alternée $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\alpha_n$ converge.