E.P.S.T de Tlemcen
Département de Mathématiques.

A. U2013/2014

//03/2014

Devoir surveillé d'Analyse 2

Exercice1(4pts)

1. Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x\ln(1-x^2)}$..

2. Donner le développement limité d'ordre 2 ,au voisinage $+\infty$,de la fonction $x \rightsquigarrow \ln(2+\frac{1}{x})$.

3. En déduire que la fonction f définie par $f(x) = x\ln(2+\frac{1}{x})$, admet la droite d'équation $y = x.\ln 2 + \frac{1}{2}$, comme asymptote quand $x \to \pm\infty$.

Exercice2(4pts)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la fonction définie par $f(x) = 2x + \sin x$

1. Montrer que f est bijective.

2. Montrer que f^{-1} est dérivable sur son domaine de définition.Donner l'expression de la dérivée de f^{-1}.

3. Montrer que f^{-1} admet un développement limité d'ordre 2 au point 0.Le determiner.

Exercice3(6pts)

Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, la fonction définie par:

$$g(x) = \begin{cases} E(\pi x) + \sin\frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Calculer $\lim_{n\to+\infty} g(\frac{1}{n\pi})$ et $\lim_{n\to+\infty} g(\frac{2}{(4n+1)\pi})$. Que déduire?

2. Determiner les points de discontinuité de g.

3. Soit $\alpha \in]0, \frac{1}{\pi}[$. Montrer que g est intégrable sur $[\alpha, 1]$.

4. Trouver deux fonctions constantes u et U telles que :

$$\forall x \in [0,\alpha] \quad ; u(x) \le g(x) \le U(x)$$

et $\int_0^\alpha (U-u)(t)\,dt \le 2\alpha$.

5. Montrer que g est integrable sur $[0,1]$.

Exercice4 (6pts)

1. Calculer la primitive suivante en intégrant par parties ,et préciser son domaine d'existence: $\int \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,dt$.

2. En utilisant la propriété de la moyenne ,calculer $\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{1^\alpha+2^\alpha+\ldots\ldots n^\alpha}{n^{\alpha+1}}\right]$, où $\alpha > 0$.

E.P.S.T de Tlemcen
Département de Mathématiques.

A. U 2013/2014
//03/2014

Corrigé du *D. S d'Analyse* 2

Exercice1(4pts)

1. Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x\ln(1-x^2)}$.

   En utilisant le dl3 au point 0 pour sinx et dl1 au pont 0 pour ln(1+y)

   $sinx = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.

   $ln(1+y) = y + o(y)$, en remplaçant y par $-x^2$, on obtient:

   $\ln(1-x^2) = -x^2 + o(x^2). \Rightarrow x\ln(1-x^2) = -x^3 + o(x^3)$.

   En operant une division selon puissances croissantes de la partie régulière du dl3 de $\sin x - x$, par celle de $x\ln(1-x^2)$, on obtient :

   $\frac{\sin x - x}{x\ln(1-x^2)} = \frac{1}{6} + o(x^3)$ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x\ln(1-x^2)} = \frac{1}{6}$.

2. le développement limité d'ordre 2 ,au voisinage $+\infty$,de la fonction $x \rightsquigarrow \ln(2+\frac{1}{x})$.

   $\ln(2+\frac{1}{x}) = \ln\left[2(1+\frac{1}{2x})\right] = \ln(2) + \ln(1+\frac{1}{2x})$.

   Si x est au voisinage de $+\infty$, alors $\frac{1}{2x}$ est au voisinage de 0.

   donc on considère le dl2 au point 0 de $ln(1+y)$

   $ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$.

   Ce qui entraine:

   $\ln(2+\frac{1}{x}) = \ln(2) + \ln(1+\frac{1}{2x}) = \ln(2) + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o((\frac{1}{2x})^2)$.

3. Le dl2 de la fonction f au voisinage de $+\infty$

   $f(x) = x\ln(2+\frac{1}{x}) = x\ln(2) + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o(\frac{1}{4x})$

   $. f(x) - \left[x\ln(2) + \frac{1}{2}\right] = -\frac{1}{8x} + o(\frac{1}{4x})$

   $\lim_{x\to\pm\infty} . f(x) - \left[x\ln(2) + \frac{1}{2}\right] = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{8x} + o(\frac{1}{4x}) = 0$

   On en déduit que la fonction f définie par $f(x) = x\ln(2+\frac{1}{x})$, admet la droite d'équation $y = x.\ln 2 + \frac{1}{2}$, comme asymptote quand $x \to \pm\infty$.

Exercice2(4pts)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la fonction définie par $f(x) = 2x + \sin x$

1. f est la somme d'un polynome et de la fonction sinus , toutes les deux de classe C^1 et $f'(x) = 2 + \cos x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. f est alors bijective car c'est une

fonction continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. donc f^{-1} existe sur son domaine de définition=$\mathbb{R}$. La formule de définition est: $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

2. f est une bijection de classe C^n $(\forall n \in \mathbb{N})$ donc f^{-1} est C^n $(\forall n \in \mathbb{N})$ sur $\mathbb{R}$.

   L'expression de la dérivée de f^{-1}.

   $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f' o f^{-1}(y)}$.

3. f^{-1} est C^3 au voisinage de 0 , elle admet un développement de Taylor d'ordre 2 ,au voisinage de 0 ,qui coincide avec son dl2 au point 0 .

   On a: $0 = f(0) \Leftrightarrow 0 = f^{-1}(0)$.

   $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f' o f^{-1}(0)} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}$

   $(f^{-1})''(y) = \left(\frac{1}{f' o f^{-1}(y)}\right)' = \frac{-(f'' o f^{-1}) f^{-1\prime}(y)}{(f' o f^{-1}(y))^2} = -\frac{(f'' o f^{-1})(y)}{(f' o f^{-1}(y))^3}$

   d'où $(f^{-1})''(0) = 0$

   $f^{-1}(y) = \frac{1}{3}y + o(y^2)$ pour y voisin de 0.

   Autre méthode

   Partant du dl2 de f au point 0 $f(x) = 3x + o(x^2)$

   Posons: $f^{-1}(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + o(y^2)$

   Sachant que $f o f^{-1} = id$, en faisant le dl2 de la composée , on obtient:

   $f o f^{-1}(y) = 3(a_0 + a_1 y + a_2 y^2) + o(y^2) = y$

   Ce qui entraine : $a_0 = 0; a_1 = \frac{1}{3}; a_2 = 0$.

Exercice3(6pts)

Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, la fonction définie par:

$$g(x) = \begin{cases} E(\pi x) + \sin\frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} g(\frac{1}{n\pi}) = \lim\limits_{n\to+\infty} E(\frac{1}{n}) + \sin n\pi = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$

   et $\lim\limits_{n\to+\infty} g(\frac{2}{(4n+1)\pi}) = \lim\limits_{n\to+\infty} E(\frac{2}{4n+1}) + \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$.

   $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ n'existe pas , g est donc discontinue en 0.

2. les points de discontinuité de g sont en plus de 0 ,les points de discontinuité de la fonction $E(\pi x), x \in [0,1]$.

   les points de discontinuité de g sont : $0, \frac{1}{\pi}, \frac{2}{\pi}, \frac{3}{\pi}$.

3. Soit $\alpha \in]0, \frac{1}{\pi}[$.

   sur $[\alpha, 1]$, la fonction g est donnée par : $g(x) = E(\pi x) + \sin\frac{1}{x}$

   c'est la somme de 2 fonctions : $E(\pi x)$: partie entière qui est une fonction en escalier ,donc intégrable et $\sin\frac{1}{x}$ qui est la composée de 2 fonctions continues donc continue et par suite integrable .Conclusion g est intégrable sur $[\alpha, 1]$.

L_{20}

$$\forall x \in]0,\alpha] \quad ; u = -1 \leq g(x) = \sin\frac{1}{x} \leq 1 = U$$

et si $x = 0$ $\quad$ -1 $\leq$ g(0)=0 $\leq$ 1

et $\int_0^\alpha (U-u)(t)\,dt = \int_0^\alpha (2)\,dt = 2\alpha.$

Donc les deux fonctions constantes u et U sont -1 et 1 :

5. De la question 4. on a: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\alpha \in]0, \frac{1}{\pi}[; 2\alpha < \varepsilon, \exists u$ et U : $2 fcts$ en escalier telles que $u \leq g(x) \leq U$ et $\int_0^\alpha (U-u)(t)\,dt = \int_0^\alpha (2)\,dt = 2\alpha < \varepsilon.$

Ce qui montre que g est integrable sur $[0,\alpha]$.

Posons $g_i : [0,1] \to \mathbb{R}, (i = 1,2)$, les fonctions définies par:

$$g_1(x) = \begin{cases} g(x) & \text{sur } [\alpha,1] \\ 0 & \text{sur } [0,\alpha] \end{cases} \quad \text{et } g_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{sur } [\alpha,1] \\ g(x) & \text{sur } [0,\alpha] \end{cases}$$

De ce qui précéde g_1, g_2 sont intégrables sur $[0,1]$,
donc $g = g_1 + g_2$,est intégrable sur $[0,1]$.

Exercice4 (6pts)

1. En intégrant par parties ,on a : $\int \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,dt = \left\langle \begin{array}{c} f = \ln(1+t) \Rightarrow f' = \frac{1}{1+t} \\ g' = \frac{1}{t^2} \Rightarrow g = -\frac{1}{t} \end{array} \right\rangle$

$= \frac{-1}{t}\ln(1+t) + \int \frac{1}{t(1+t)}\,dt.$

Pour terminer les calculs , on fait une décomposition en éléments simples:

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \Rightarrow \int \frac{1}{t(1+t)}\,dt = \ln|t| - \ln|1+t| + cste$$

$$\int \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,dt = \frac{-1}{t}\ln(1+t) + \ln\left|\frac{t}{1+t}\right| + cste$$

Ce calcul est possible sur tout intervalle $I = [a,b]$, tel que $b > a > 0$, ou bien $0 > b > a > -1$.

2. En utilisant la propriété de la moyenne ,calculer $\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1^\alpha+2^\alpha+\ldots..n^\alpha}{n^{\alpha+1}}\right]$, où $\alpha > 0$.

$\left[\frac{1^\alpha+2^\alpha+\ldots..n^\alpha}{n^{\alpha+1}}\right] = \frac{1}{n}[(\frac{1}{n})^\alpha + (\frac{2}{n})^\alpha + \ldots + (\frac{n}{n})^\alpha]$

en posant $f(x) = (x)^\alpha$ et $[a,b] = [0,1]$, on a :

$\left[\frac{1^\alpha+2^\alpha+\ldots..n^\alpha}{n^{\alpha+1}}\right] = \frac{1}{n}[f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \ldots + f(1)]$

$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1^\alpha+2^\alpha+\ldots..n^\alpha}{n^{\alpha+1}}\right] = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}[f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \ldots + f(1)] = \int_0^1 f(t)\,dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}.$

E.P.S.T de Tlemcen

Département de Mathématiques

A.U 2013/2014

16/06/2014

Examen d'Analyse2 (Rattrapage)

Exercice 1

1. Peut on utiliser les développements limités pour calculer une integrale, Justifier votre réponse.
2. Calculer les intégrales suivante

$$\int_2^3 \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\,dx,\ \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx.\ ,\int_{-1}^{1} Arctgx,\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^3 x,$$

Exercice 2

I) Soit $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $f(x,y) = \begin{cases} \ln(1+\frac{x^3y}{x^2+y^2}) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. f est elle differentiable en $(0,0)$
3. .Determiner les extremums de f s'il existent

Exercice3

1. Intégrer l'équation différentielle suivante:

$$y' = \frac{xe^y}{x^2-1}$$

en précisant les domaines d'existence des solutions .

2. Peut raccorder les solutions en $x = 1$

Exercice4

Considérons la courbe paramétrée définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(t) = (t^2 + \frac{2}{t}, t^2 + \frac{1}{t^2})$

1. Determiner les points où la tangente est horizontale.
2. Déterminer le point stationnaire et dessiner l'allure de la courbe en ce point .