E.P.S.T de Tlemcen
Département de Mathématiques

Durée : 2h 30'
28/01/2014

Examen final d'analyse 1

Exercice1

Pour $n \geq 2$, on définit la fonction $\Phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, en posant $\Phi_n(x) = x - \cos\frac{x}{n}$.

1. Montrer que Φ_n est strictement croîssante. En déduire qu'il existe un unique nombre réel x_n tel que
$$x_n = \cos\frac{x_n}{n}$$
Montrer que l'on a $x_n \in]0,1[$.
2. Montrer que :
$$\forall x \in]0,1[, \cos\frac{x}{n} < \cos\frac{x}{n+1}$$
Endéduire que La suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.
3. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

Exercice2

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier votre réponse.

1. La suite $u_n = \cos\sqrt{n+1} - \cos\sqrt{n}$, est convergente vers 0.
2. $\forall n \geq 1, \exists\, c_n \in]n, n+1[, u_n = \frac{-1}{2\sqrt{c_n}}\sin\sqrt{c_n}$.

Exercice3

1. La fonction $x \rightsquigarrow x^2E(x)$ est elle continue et dérivable aux points 0 , $\frac{1}{2}$ et 1.
2. On définit la fonction f sur $[-1, +\frac{3}{2}]$, par:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}\right) & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ x^2E(x) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$
a-Préciser le domaine de continuité de f (c.à.d:Pour quelles valeurs de x , f est continue.)

b-Préciser le domaine de dérivabilité de f .Et donner l'expression de la dérivée quand elle existe.

3. Calculer si elle existe la dérivée de $g(x) = arctgx$. En déduire celle de $h(x) = fog(x)$ quand elle existe .

Exercice4

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites à termes positifs telles que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$
$$u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}.$$

1. Rappeler la définition de suites adjacentes . Montrer que les suites

$(u_n)_n$et $(v_n)_n$ sont adjacentes .

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

a- Calculer $f_n(0)$ et exprimer $f_n(1)$en fonction de u_n.

b- Justifier que f_n est dérivable et montrer que

$$f'_n(x) = -e^{-x} \frac{x^n}{n!}$$

c- Enoncer le théorème des accroissements finis.

d- En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f_n sur $[0,1]$ vérifier que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = e$$

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

E. P. S. T de Tlemcen *Mme Merzagui*
Département de Mathématiques

Corrigé de l'E.F d'analyse 1

Exercice1 6pts

1. Pour $n \geq 2$, on définit la fonction $\Phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, en posant $\Phi_n(x) = x - \cos\frac{x}{n}$.

Φ_n est dérivable et $\Phi_n'(x) = 1 + \frac{1}{n}\sin\frac{x}{n}$. Puisque $n \geq 2$ et $-1 \leq \sin\frac{x}{n} \leq 1$ alors $\Phi_n'(x) > 0$. Donc Φ_n est strictement croissante.

On a : $0 < \frac{1}{n} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{1}{n} < 1 \Rightarrow \Phi_n(1) > 0$..... (1pt)

$$\left.\begin{array}{c}\Phi_n(0) = -1 < 0 \text{ et } \Phi_n(1) > 0 \\ \Phi_n \text{ continue sur } \mathbb{R}\end{array}\right\} \overset{\text{valeurs intermediaires}}{\Longrightarrow} \exists x_n \in]0,1[/ \ \Phi_n(x_n) = 0.$$

Φ_n est strictement croissante, alors elle est injective et donc x_n est unique. x_n vérifie.. (1pt)

$$x_n = \cos\frac{x_n}{n}$$

2. $x \in]0,1[, n \geq 2 \Rightarrow 0 < \frac{x}{n} < \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$. et $0 < \frac{x}{n+1} < \frac{x}{n} < \frac{\pi}{2}$.

Sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, la fonction *cos* est décroissante, ce qui entraine:..... (1pt)

$$\forall x \in]0,1[, \cos\frac{x}{n} < \cos\frac{x}{n+1}$$

Et puisque $x_{n+1} \in]0,1[$, on a :

$$\Phi_n(x_{n+1}) = x_{n+1} - \cos\frac{x_{n+1}}{n} > x_{n+1} - \cos\frac{x_{n+1}}{n+1} = 0 = \Phi_n(x_n)$$

Donc $\Phi_n(x_{n+1}) > \Phi_n(x_n)$..... (1pt)

$\Phi_n(x_{n+1}) > \Phi_n(x_n) \overset{\Phi_n \text{ croissante}}{\Longrightarrow} x_{n+1} > x_n$..... (1pt)

La suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.

3. On a, $\forall x \in]0,1[, \frac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \overset{\cos \text{ continue}}{\Longrightarrow} \cos\frac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$

puisque $x_n \in]0,1[$ alors $\cos\frac{x_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ et $\cos\frac{x_n}{n} = x_n$

On endéduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$. ..... (1pt)

Exercice2 (3pts)

1. On sait que : $\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin a \sin b$

en prenant $\left.\begin{array}{l} a+b = \sqrt{n+1} \\ a-b = \sqrt{n} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{2} \\ b = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2} \end{array}\right.$ On obtient :

$$u_n = \cos\sqrt{n+1} - \cos\sqrt{n} = -2\sin\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{2}\sin\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}$$

$$|u_n| \leq 2\left|\sin\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}\right| \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

Le théorème d'encadrement entraine $(u_n)_n$ est convergente vers 0.

$\boxed{\text{L'affirmation 1 est donc vraie}}$..... (1.5pts.)

2. Par application du théoème des accroissements finis à la fonction $f(x) = \cos\sqrt{x}$ sur l'intervalle $[n, n+1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continue sur } [n, n+1] \\ f \text{ dérivable sur }]n, n+1[\end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c \in]n\, n+1[; f(n+1) - f(n) = f'(c) = \frac{-1}{2\sqrt{c}} \sin\sqrt{c}$$

$c \in]n\, n+1[\Rightarrow c = c(n) = c_n$ et $f(n+1) - f(n) = u_n$. On a obtenu donc:

$\forall n \geq 1, \exists c_n \in]n, n+1[, u_n = \frac{-1}{2\sqrt{c_n}} \sin\sqrt{c_n}. \Leftrightarrow$ L'affirmation 2 est vraie.....1.5pts

Exercice3..(6pts)

1. a) étude de la continuité.....0.75pt

posons $\varphi(x) = x^2 E(x) \Rightarrow \begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \varphi(\frac{1}{2}) = 0 \\ \varphi(1) = 1 \end{cases}$, on a alors :

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \varphi(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} 0 = 0 = \varphi(0)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \varphi(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} -x^2 = 0 = \varphi(0)$.

$\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ >}} \varphi(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} 0 = 0 = \varphi(\frac{1}{2})$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ <}} \varphi(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} 0 = 0 = \varphi(\frac{1}{2})$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \varphi(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} x^2 = 1 = \varphi(1)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \varphi(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} 0 = 0 \neq \varphi(1)$.

La fonction $x \rightsquigarrow x^2 E(x)$ est continue en 0 et $\frac{1}{2}$. Elle est discontinue en 1.

b) étude de la dérivabilité.....0.75pt

- La fonction $x \rightsquigarrow x^2 E(x)$ n'etant pas continue en 1, elle ne peut donc être dérivable en 1.
- $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{0}{x} = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{-x^2}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} -x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi'(0) = 0$$
- $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ >}} \frac{\varphi(x) - \varphi(\frac{1}{2})}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{0}{x} = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{0}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} 0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi'(\tfrac{1}{2}) = 0$$

2. On définit la fonction f sur $[-1, +\frac{3}{2}]$, par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}\right) & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ x^2 E(x) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

d'aprés la définition de la fonction partie entière

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}\right) & \text{si } -1 \le x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \le x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

a-Le domaine de continuité de f..(1.5pt)

- sur $[-1,0[$, la fonction est composée de fonction continues elle est donc continue.
- sur $]0,1[$, la fonction est constante, donc continue.
- sur $]1,\frac{3}{2}]$, la fonction est polynomiale donc continue.
- Aux points 0 et 1

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}} = 0 = f(0)$$

et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0 = f(0)$ .Donc f est continue en 0.

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} 0 = 0 \neq f(1)$. Donc f n'est pas continue en 1

Conclusion: f est continue sur $[-1,+\frac{3}{2}]\setminus\{1\}$

b-Le domaine de dérivabilité de f.(1.5pt)

- sur $[-1,0[$, la fonction est composée de fonction dérivables elle est donc dérivable et $f'(x) = \frac{-1}{x^2}\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- sur $]0,1[$, la fonction est constante, donc dérivable et $f'(x) = 0$.
- sur $]1,\frac{3}{2}]$, la fonction est polynomiale donc dérivable et $f'(x) = 2x$.
- Au point 1 f n'est pas continue donc elle n'est pas dérivable
- Au point 0

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)} = 1 \neq f'_g(0)$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0 = f'_d(0) \neq f'_g(0)$. Donc f n'est pas dérivable en 0. Conclusion: f est dérivable sur $[-1,+\frac{3}{2}]\setminus\{0,1\}$

3. $x \rightsquigarrow g(x) = arctgx$. est la fonction réciproque de la fonction tan définie sur $]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. La formule de dérivée de la fonction réciproque permet d'obtenir:

$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. $\forall x \in \mathbb{R}$.....(0.75pt)

La fonction $h(x) = fog(x)$ existe quand $g(x) \in [-1,+\frac{3}{2}]$,donc $x \in [-tg1, tg\frac{3}{2}]$.

Pour $x \in [-tg1, tg\frac{3}{2}]\setminus\{0, tg1\}$, h est dérivable et $h'(x) = g'(x)f'og(x)$..(0.75pt).

Exercice4 (5pts)

Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_n \geq 1$deux suites à termes positifs telles que pour tout entier n

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}.$$

(v_n)est bien définie si $n \geq 1$

les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} u_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N} \\ (u_n)_n \text{est croissante} \\ (v_n)_{nn} \text{est décroissante} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0 \end{cases}$ .....(0.5pt)

1. ● $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + \frac{1}{n.n!} > u_n$.....(0.25)

● $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n.n!} = 0$.....(0.25)

● $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \Rightarrow (u_n)_{n\geq 0}$est croissante.....(0.25)

● $v_{n+1} - v_n = (u_{n+1} - u_n) + (\frac{1}{(n+1)(.n+1)!} - \frac{1}{n.n!}) = \frac{n+2}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!}$

$= \frac{n(n+2)-(n+1)^2}{n.(n+1)(n+1)!} = \frac{-1}{n.(n+1)(n+1)!} < 0. \Rightarrow (v_n)_{n\geq 0}$est décroissante.....(0.25)

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

a-$f_n(0) = 1$ et $f_n(1) = e^{-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e^{-1} u_n$.....(0.5)

b- f_n est le produit d'une fonction polynomiale et de l'exponentielle , qui sont dérivables , elle est dérivable et f

$'_n(x) = -e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + e^{-x} \sum_{k=1}^{n} \frac{kx^{k-1}}{k!}$.....$(0.75pt)$

or $\sum_{k=1}^{n} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \overset{\langle k-1=p \rangle}{=} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{x^p}{p!}$

D'où f

$'_n(x) = -e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + e^{-x} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{x^p}{p!} = -e^{-x} \frac{x^n}{n!}$.....(0.25)

$$f'_n(x) = -e^{-x} \frac{x^n}{n!}$$

c- le théorème des accroissements finis.

$\left.\begin{array}{l} f \text{continue sur} [a,b] \\ f \text{dérivable sur}]a,b[\end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c \in]a,$

$b[; f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$.....(0.5)

d- En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f_n sur $[0,1]$ on a :

$$\exists c \in]0,1[;\ e^{-1} u_n - 1 = -e^{-c} \frac{c^n}{n!} \text{.....} (0.5pt)$$

Puisque $c \in]0,1[$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (-e^{-c} \frac{c^n}{n!}) = 0$ ce qui entraine $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-1} u_n - 1 = 0$.

Et par suite

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = e \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (0.5)$$

les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes donc elles sont convergentes vers la même limite $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = e \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (0.5)$