Électrostatique (partie I)

Mohamed Mebrouki

EPST Tlemcen

1 septembre 2015

L'électrostatique est tout autour de nous

Les lampes de chambre, les horloges électriques, les microphones, les calculateurs, les téléviseurs, les ordinateurs ne fonctionnent qu'en présence de l'électricité. Les voitures, les trains, les avions (et même les fusées !) ne peuvent se mettre en marche sans l'électricité.

Le corps humain a besoin d'électricité pour la contraction de ses muscles (le cœur, par exemple). Le système nerveux est à la base de l'électricité. Les atomes et les molécules et toutes les réactions chimiques existent à cause de l'électricité.

Si jamais les phénomènes liés à l'électricité cessent d'exister le monde autour de nous s'écroulera !

Afin de se mettre sur la route qui mène vers la compréhension de la physique de ces phénomènes très complexes, il est utile (et même obligatoire !) de commencer par aborder une branche de la physique, et non des moindres, appelée : électrostatique.

En effet, les origines de l'électrostatique remontent à une époque très lointaine dans l'histoire de l'humanité. C'est ainsi que :

1. Thalès de Milet (-625, -547), célèbre mathématicien, découvre l'électrisation en frottant un morceau d'ambre jaune avec une peau de chat.
2. Le mot "électrique" est inventé par William Gilbert (1544-1603), un physicien et médecin anglais, (vers 1600) en souvenir de l'ambre ("êlektron" en grec)

3. En 1733, le chimiste français Charles Du Fay (1698-1739), examinant l'attraction et la répulsion des corps électrisés par frottement, distingue une électricité positive et une électricité négative (électricité résineuse, électricité vitreuse).
4. En 1740, un inventeur français, Jean Théophile Désaguliers (1683-1744), suggéra qu'on nomme conducteurs les corps à travers lesquels le fluide électrique circule librement (par exemple les métaux) et isolants ceux à travers lesquels il ne se déplace pas librement (par exemple le verre et l'ambre). Les expérimentateurs découvrirent qu'on pouvait accumuler progressivement une forte charge électrique sur un conducteur si celui-ci était isolé par du verre ou une couche d'air.

5. L'américain Benjamin Franklin (1706-1790) suggéra qu'il s'agissait en fait d'un seul et même fluide. Quand on frottait le verre, l'électricité y pénétrait, le rendant « chargé positivement » ; au contraire, quand on frottait l'ambre, l'électricité en sortait et l'ambre devenait donc « chargé négativement ». Et quand un barreau négatif entrait en contact avec un positif, le fluide électrique circulait du positif au négatif jusqu'à réaliser un équilibre neutre. Si le mot fluide de Franklin est remplacé par le mot électrons et si on renverse la direction du fluide (en réalité les électrons circulent de l'ambre vers le verre), on constate que son explication était correcte. Il démontra en 1752 que la foudre est un phénomène dû à l'électricité et invente le paratonnerre pour s'en protéger.

6. En 1785, le physicien français Charles Augustin de Coulomb (1736-1806) réussit, à l'aide d'une balance de torsion, à mesurer l'attraction et la répulsion électriques. Il montra que cette attraction (ou répulsion) entre des charges données varie comme l'inverse du carré de la distance entre charges. De ce point de vue, l'attraction électrique ressemble à l'attraction gravitationnelle. En l'honneur de cette découverte, l'unité de la quantité d'électricité du système international se nomme le coulomb.
7. En avril 1820, lors d'un cours sur l'électricité qu'il faisait à ses étudiants, Hans Christian Ørsted (1777-1851), un physicien danois, découvrit la relation entre l'électricité et le magnétisme. Il démontra, par l'expérience, qu'un fil transportant du courant était capable de faire bouger l'aiguille aimantée d'une boussole. Il pouvait donc y avoir interaction entre les forces électriques d'une part et les forces magnétiques d'autre part, ce qui était révolutionnaire pour l'époque.

8. En 1821, le physicien anglais Michael Faraday (1791-1867) construit le premier moteur électrique. En 1831, il découvre l'induction électromagnétique. En 1833, il introduit les termes d'anode, de cathode, d'anion, de cation et d'ion. Il a donné son nom au Farad, l'unité SI de capacité électrique.
9. En 1897, le rapport de masse sur charge, $\frac{m}{e}$, de l'électron fut d'abord mesuré par Joseph John Thomson (1856-1940). Ce faisant, il montra que l'électron, dont on avait antérieurement postulé l'existence pour expliquer l'électricité, était en réalité une particule avec une masse et une charge.

10. Au cours de l'année 1908, Robert Andrews Millikan (1868-1953) entreprit de mesurer la charge élémentaire qu'est l'électron en mesurant la force électrique qui permet de combattre la gravité s'exerçant sur une goutte d'huile. Après de multiples perfectionnements, il publia en 1913 les premiers résultats de son expérience. En fait, Millikan, par simple mesure de vitesse par le rapport de la distance parcourue sur le temps mis pour la parcourir sur une gouttelette d'huile qu'il ionisait en l'irradiant par rayons X, observa expérimentalement que les valeurs d'ionisation étaient toutes multiples entières de $e = 1,592 \times 10^{-19} C$, constante que l'on connaît aujourd'hui sous le nom de charge élémentaire.

Expérience

On frotte pendant 10 secondes une tige en verre avec du tissu (laine, coton, fourrure) puis on approche la tige d'un ballon gonflé et recouvert d'Aluminium. Le ballon s'attire vers la tige et la suit.

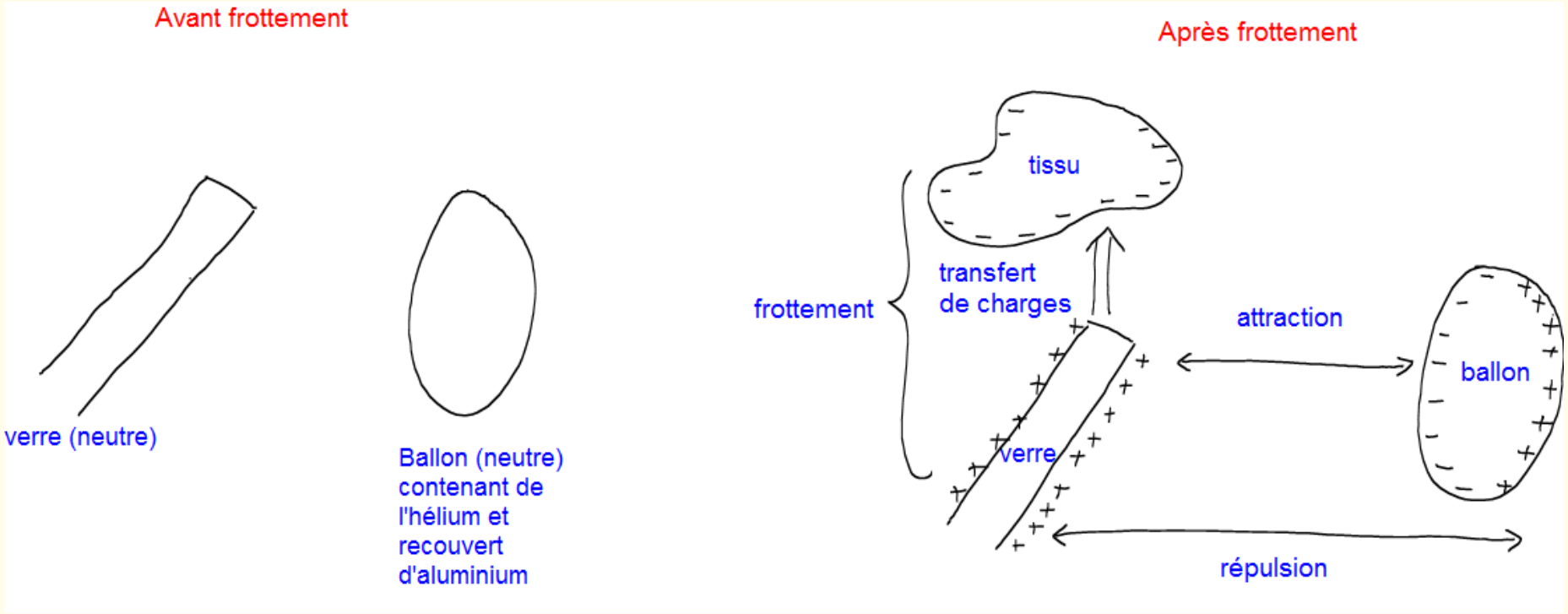


Figure : Frottement d'une tige de verre par un tissu permet le transfert de charges.

Commentaires

1. La tige en verre et le tissu sont des corps (matériaux) neutres. Cela signifie que chaque corps contient le même nombre de charges électriques positives (noyaux contenant des protons) que de charges électriques négatives (électrons).
2. En frottant la tige en verre avec du tissu, il est possible d'arracher quelques électrons au verre ; lesquels vont se déposer sur la surface du tissu. La tige en verre devient donc chargée négativement, puisqu'elle a reçu un excès de charges négatives. Alors que le tissu est devenu chargé positivement, car il vient de perdre des charges électriques négatives (un manque de charges électriques négatives est compté comme un surplus de charges électriques positives ! ! !)

3. Le fait que les charges électriques reçues par le tissu restent sur leurs places sur ce dernier est due à une propriété intrinsèque du tissu, à savoir que les électrons sur le tissu ont une faible mobilité (capacité à se déplacer dans le corps). Ce type de corps est appelé : isolant.
4. C'est le phénomène de l'électrisation des corps par un transfert de charges entre deux corps (triboélectricité). Ce transfert de charges est animé par la disposition des différentes matières à recevoir ou à céder des électrons (affinité chimique). C'est ainsi que l'ambre frotté avec de la laine ou de la soie se charge négativement, tandis qu'en le frottant avec du celluloïd (matière plastique) il se charge positivement !

5. Il ne faut pas confondre une charge électrique positive par essence (exemple : le proton) avec une charge électrique positive "créée" en un endroit où la charge électrique négative qui s'y trouvait l'a déserté.
6. La perte de quelques électrons ne va pas changer radicalement les propriétés physico-chimiques du corps frotté, puisque celui-ci peut récupérer ses électrons par contact avec son environnement !
7. En approchant la tige en verre, chargée positivement, du ballon recouvert d'aluminium, et lui-même neutre, les charges électriques négatives (électrons) du ballon vont sentir l'effet d'attraction des charges électriques positives en excès sur la tige.

8. Rappelons que l'aluminium est un métal, c'est à dire qu'il contient des électrons (charges négatives) plus ou moins libres de se déplacer en son sein (forte mobilité). Cette propriété permet à une partie de ces électrons libres dans l'aluminium de s'accumuler sur la surface du ballon en face du tissu. C'est le phénomène d'attraction entre charges électriques de polarité différente.
9. Une force mécanique d'attraction se crée donc entre ces deux corps (puisque le ballon se déplace vers la tige !), l'un (tige) chargé positivement et l'autre (tissu) chargé négativement. Cette force agit sans contact entre les deux corps (à distance).
10. L'expérience a aussi montré (Coulomb) que cette force d'attraction est proportionnelle à la quantité de charges des deux corps et inversement proportionnelle à la distance entre eux.

11. L'expérience montre que deux charges négatives (positives) se repoussent. C'est le phénomène de répulsion entre charges électriques de même polarité.

Quantification de la charge électrique

L'expérience de Millikan s'est avérée être la première preuve de la quantification de la charge électrique qui est strictement un multiple entier positif ou négatif de la valeur fondamentale (après perfectionnement) :$e = 1,60217646 \times 10^{-19}$ en unité de Coulomb (C).

Dans un système isolé, la charge électrique est conservée.

Charge continue

Bien que les électrons sont des particules discrètes, il est parfois utile, de par leur très très grand nombre (dans les conditions normales de température et de pression, 1 mm^3 de dioxygène O_2 contient environ 4.3×10^{17} charges élémentaires positives et autant de charges négatives !), mais aussi à cause du fait qu'elles sont indiscernables (on ne peut pas les distinguer les unes des autres), de considérer leur quantité de charge comme une grandeur continue. Dans ce cas, on parle plutôt d'une distribution de charge électrique dans l'espace, au lieu de se mettre à compter les électrons un par un ! ! !.

Distribution volumique

Pour cela, on délimite un volume infinitésimal ΔV, autour du point de vecteur position $\vec{r}$, qui contient un nombre relativement faible d'électrons de quantité de charge ΔQ, et on définit la distribution volumique de la charge électrique comme :

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV} \qquad \text{mesurée en} \quad C.m^{-3}$$

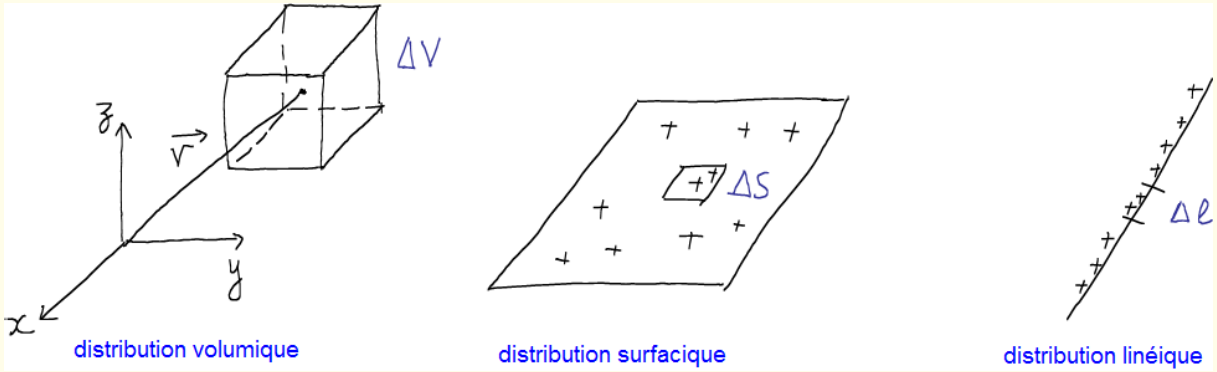


Figure : Distributions de charge volumique, surfacique et linéique

Distribution surfacique

Il se trouve parfois que l'épaisseur d'un volume contenant des charges électriques est très très petite devant la racine carré de sa surface ($d << \sqrt{S}$). Dans ce cas, il est possible de considérer avec une bonne approximation que les charges sont distribuées sur la surface S du volume. On délimite donc une surface infinitésimale ΔS, autour du point de vecteur position $\vec{r}$, qui contient un nombre relativement faible d'électrons de quantité de charge ΔQ, et on définit la distribution surfacique de la charge électrique comme :

$$\sigma(\vec{r}) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \frac{dQ}{dS} \qquad \text{mesurée en} \quad C.m^{-2}$$

Distribution linéique

Dans le cas où la longueur d'un fil, sur lequel est répartie une charge électrique, est très grande devant les autres dimensions, on peut choisir une longueur infinitésimale Δl, autour du point de vecteur position $\vec{r}$, qui contient un nombre relativement faible d'électrons de quantité de charge ΔQ, et on définit la distribution linéique de la charge électrique comme :

$$\lambda(\vec{r}) = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{dQ}{dl} \qquad \text{mesurée en} \quad C.m^{-1}$$

Remarque

Dans ce cas, les charges électriques sont réparties sur tout le volume du fil, mais on considère que la distribution sur la section du fil est la même en tout point de cette section ; ce qui change c'est la distribution le long du fil.

Moment dipolaire d'un ensemble de charges

Comme pour le cas d'un ensemble de corps massiques où on a intérêt à définir le centre de masse, il est aussi utile de définir le "centre de charge" d'un ensemble discret de charges électriques par rapport à un point O. Par analogie au cas des masses, le centre de charge (repéré par le vecteur $\vec{R}$ par rapport au point O) d'un ensemble de N charges électriques $(q_1,\, q_2,\, \cdots,\, q_N)$ repérées par les vecteurs $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_N)$, respectivement, est défini comme suit :

$$\vec{R} \equiv \frac{q_1\,\vec{r}_1 + q_2\,\vec{r}_2 + \cdots q_N\,\vec{r}_N}{q_1 + q_2 + \cdots + q_N},$$

où la quantité de charge totale de l'ensemble est donnée par

$$Q = q_1 + q_2 + \cdots q_N$$

On appelle la quantité :

$$\vec{p} = q_1\,\vec{r}_1 + q_2\,\vec{r}_2 + \cdots q_N\,\vec{r}_N = \sum_{i=1}^{N} q_i\,\vec{r}_i$$

moment dipolaire $\vec{p}$ de l'ensemble discret de charges par rapport à un point fixe O. Ce vecteur donne une idée sur la répartition des charges par rapport à ce point.

L'intérêt à définir le centre de charge d'un ensemble de charges électriques réside, entre autres, dans le fait qu'il est possible parfois d'avoir un ensemble de charges très éloigné par rapport à l'endroit où l'on veut mesurer l'effet de ces charges. On peut dans ce cas et avec une bonne approximation considérer l'ensemble de charges comme étant une seule charge Q concentrée au centre de charge de l'ensemble ! ! !

Dans le cas d'une distribution continue des charges, le moment dipolaire aura la forme :

$$\vec{p} = \int_V \rho(\vec{r})\vec{r}\,dV \qquad \text{(distribution volumique)},$$

$$\vec{p} = \int_S \sigma(\vec{r})\vec{r}\,dS \qquad \text{(distribution surfacique)},$$

$$\vec{p} = \int_L \lambda(\vec{r})\vec{r}\,dl \qquad \text{(distribution linéique)}$$

Force électrostatique

Dans son travail sur l'interaction qui existe entre deux charges électriques immobiles (statiques), Coulomb est parvenu, à l'aide d'un dispositif appelé balance de torsion et en s'inspirant de la loi de la gravitation établie auparavant par Isaac Newton (1643–1727), à faire quelques remarques pertinentes sur le phénomène étudié, à savoir :

1. La force exercée par l'une des charges sur l'autre est radiale, c'est à dire portée par la droite qui relie les deux charges.
2. La force est proportionnelle au produit des charges.
3. La force varie comme l'inverse du carré de la distance entre les deux charges.
4. la force est attractive entre deux charges de signes opposés (polarité différente) et répulsive entre deux charges de même signe (même polarité)

L'expression mathématique moderne de la force électrostatique (loi de Coulomb) entre deux charges statiques q_1 et q_2 séparées par une distance r s'écrit comme :

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1\, q_2}{r^2}\vec{u}_{1\to 2}$$

$\vec{F}_{1/2}$ est le vecteur de la force appliquée par la charge q_1 sur la charge q_2 et $\vec{u}_{1\to 2}$ le vecteur unitaire porté par la droite entre les deux charges et dirigé de q_1 vers q_2.

La constante $K = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \times 10^9 \quad \dfrac{Nm^2}{C^2}$ est dite constante de Coulomb. Elle est introduite à même d'assurer l'homogénéité de l'expression de la force électrostatique.

La constante $\varepsilon_0 = 8.8537 \times 10^{-12} \quad \dfrac{C^2}{m^2} \equiv \dfrac{Farad}{m}$ est la permittivité électrique du milieu où se trouvent les charges.

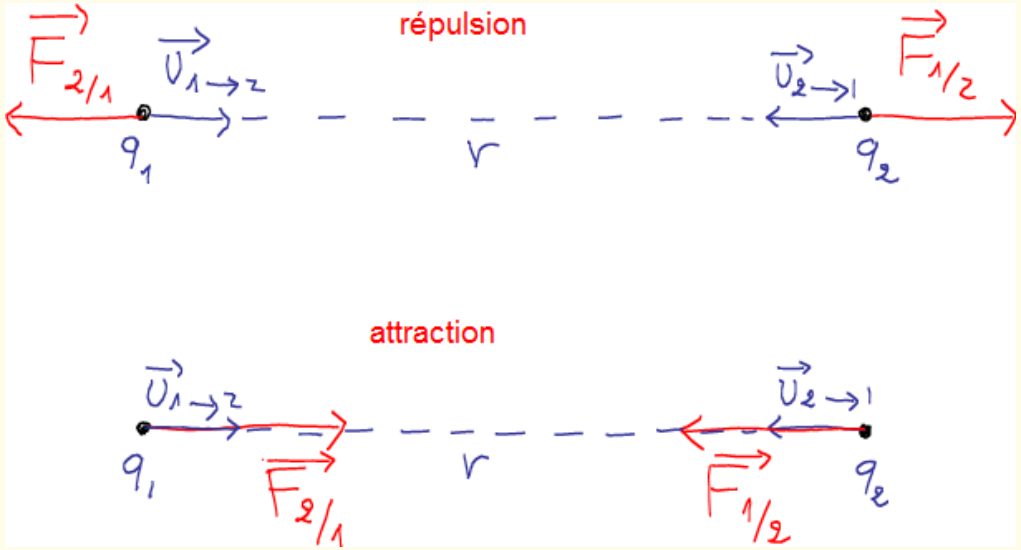


Figure : Forces électrostatiques entre deux charges électriques.

De même, la force électrostatique appliquée par la charge q_2 sur la charge q_1 est donnée par :

$$\vec{F}_{2/1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1\, q_2}{r^2}\vec{u}_{2\to 1}$$

$\vec{u}_{2\to 1}$ est le vecteur unitaire porté par la droite entre les deux charges et dirigé de q_2 vers q_1.

Convention importante !

La charge q_1 (q_2) prend une valeur algébrique : elle a une valeur négative si la charge électrique est de polarité négative et positive si celle-ci est de polarité positive. Cette convention nous permet d'envisager, sans peine, les deux cas d'interaction entre les deux charges, à savoir :

Remarques

1. L'unité de la quantité de charge électrique est le Coulomb, ce qui est très énorme ! Pour cela on travaille avec les sous-unités du Coulomb : microCoulomb (μC), nanoCoulomb ($n\,C$), etc$\cdots$
2. La loi de Coulomb n'est valable que pour des charges immobiles (statiques). C'est pour cette raison que la branche de physique qui traite cette situation est appelée : électrostatique.
3. La force électrostatique entre deux charges q_1 et q_2 obéit au troisième principe de Newton (action et réaction) :

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$$

4. L'expression de la force électrostatique représente une similitude avec la force de Newton entre deux masses m_1 et m_2 séparées d'une distance r et donnée par :

$$\vec{F}_{1/2} = G\frac{m_1\, m_2}{r^2}\vec{u}_{1\to 2}$$

où $G = 6.67384 \times 10^{-11} \quad m^3\, kg^{-1}\, s^{-2}$ est la constante gravitationnelle ; sauf que pour les masses il n'y a pas de masse négative !.

5. Le rapport entre les modules de la force d'attraction gravitationnelle F_g et la force de répulsion électrostatique F_e entre deux électrons de charge $e = 1.6 \times 10^{-19}\, C$ et de masse $m_e = 9.109 \times 10^{-31}\, kg$ est donné par :

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{K\dfrac{q_1\,q_2}{r^2}}{G\dfrac{m_1\,m_2}{r^2}} = \frac{K}{G}\frac{e^2}{m_e^2} = \frac{9\times 10^9}{6.67384\times 10^{-11}}\frac{(1.6\times 10^{-19})^2}{(9.109\times 10^{-31})^2}$$

Ce qui donne

$$\frac{F_e}{F_g} \approx 4\times 10^{42}$$

Ce résultat montre que la force de gravitation est insignifiante devant la force électrostatique (colossale) agissant entre deux électrons. Malgré cela, on a de la peine à sentir cette force dans notre vie quotidienne (monde macroscopique). Ce que nous sentons est plutôt l'effet de la force de gravitation.

La source de cette anomalie réside dans le fait que, contrairement aux masses, les charges électriques possèdent deux types de polarité (négatives et positives) ; ce qui cause une compensation mutuelle des forces électrostatiques à l'échelle macroscopique. En fait, c'est cette double polarité des charges électriques qui fait que la matière autour de nous tienne !

Principe de superposition

Si maintenant, en plus des deux charges électrique q_1 et q_2 dans leurs positions respectives, on ramène une troisième charge q_3 plus près. La force électrostatique agissant sur q_3 de la part de deux charges q_1 et q_2 est la somme vectorielle des deux forces $\vec{F}_{1/3}$ (la force appliquée par la charge q_1 sur q_3) et $\vec{F}_{2/3}$ (la force appliquée par la charge q_2 sur q_3), telle que :

$$\vec{F}_{1+2/3} = \vec{F}_{1/3} + \vec{F}_{2/3}$$

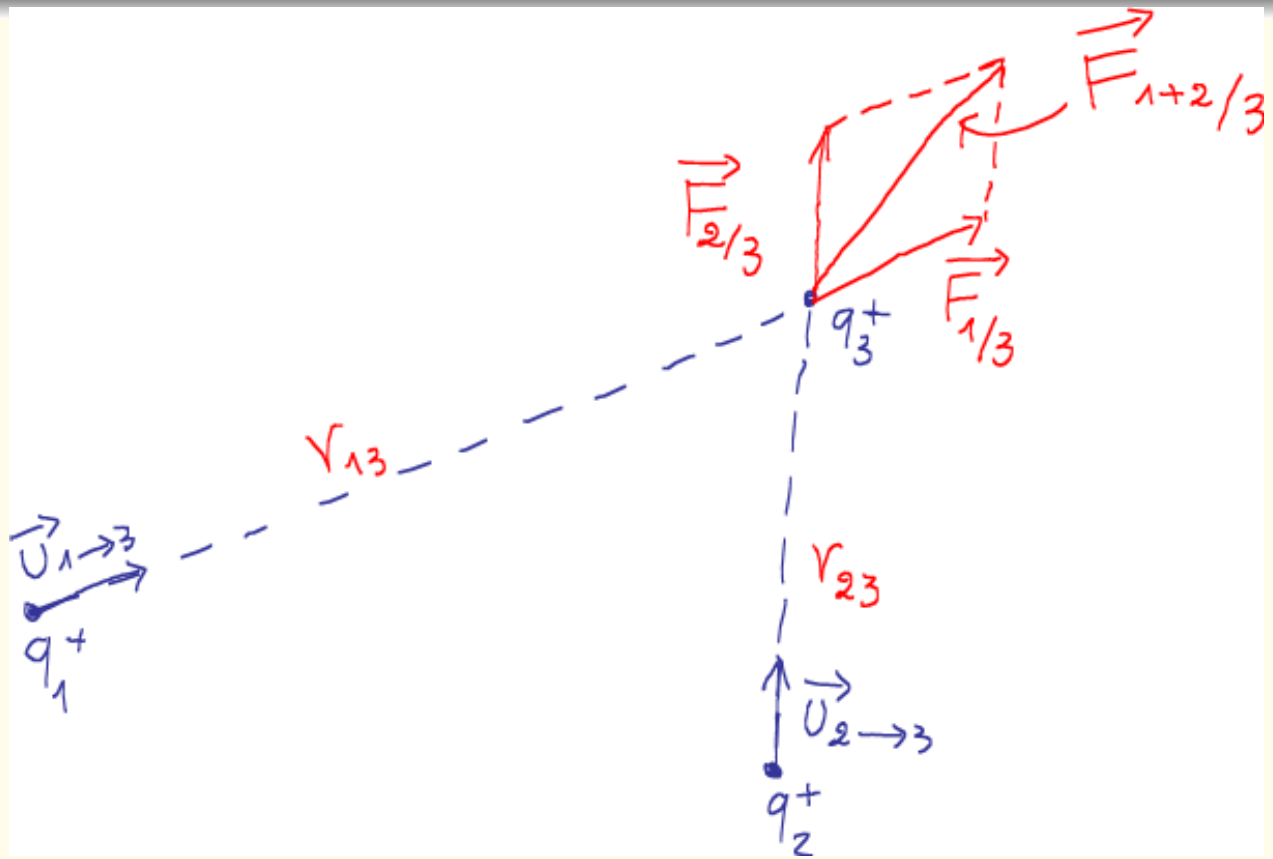


Figure : Le champ électrostatique créé par deux charges en un point est la somme vectorielle des deux champs créés par chacune des deux charges

Ceci est le principe de superposition qui dit que la force appliquée par un ensemble de charge sur une charge q est la somme vectorielle des forces de chaque charge de l'ensemble appliquée sur la charge q séparément (en considérant les autres charges comme inexistantes !). Le principe de superposition n'est pas évident mais il est vérifié expérimentalement.

Dans le cas de N charges électriques (q_i, $i = 1 \cdots, N$), la force totale que subit une charge q par l'ensemble de N charges est donnée par :

$$\vec{F}_{N/q} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{q_i/q} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\, q_i}{r_i^2} \vec{u}_{i\to q}$$

où r_i est la distance entre la charge q et la charge q_i et $\vec{u}_{i\to q}$ le vecteur unitaire allant de la charge q_i vers la charge q.

L'éminent physicien américain (prix Nobel) Richard Feynman (1918-1988) disait que toute l'électrostatique n'était que la loi de Coulomb et le principe de superposition, le reste n'est que calcul mathématique!!!

Champ électrostatique

En faisant sortir q de l'expression de la force électrostatique appliquée par N charges sur une charge q, on trouve :

$$\vec{F}_{N/q} = q \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_{i\to q}$$

On peut donc interpréter ce résultat comme suit : la force que subit la charge q est égale au produit de la même charge et une quantité vectorielle qui ne dépend que des N charges de l'ensemble et leurs positions par rapport à la charge électrique considérée q.

La quantité vectorielle

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_{i\to q}$$

est appelée champ électrostatique créé par l'ensemble de N charges à l'endroit où se trouve la charge q, et on la représente par la lettre $\vec{E}_q$.

Utilité du concept du champ électrostatique

L'introduction du concept du champ électrostatique facilite énormément les calculs des forces. Car pour calculer la force que subit une charge q, pouvant être dans différents endroits, de la part de N charges, on doit calculer la somme des forces ci-dessus en définissant à chaque fois les distances que séparent la charge q des autres charges, ce qui est un peu onéreux !

Maintenant, avec le concept du champ électrostatique, il suffit de définir, une fois pour toute, l'expression de ce dernier en tout point de l'espace, et la force que subit la charge q n'est que le produit de q par le champ électrostatique au point où se trouve q !

Aussi, il n'est pas intéressant pour nous, parfois, de connaitre l'origine du champ électrique régnant dans une région. Il nous suffit donc pour calculer la force que subit une charge q de connaitre la valeur du champ électrique au point où se trouve q et le multiplier par q.

Les physiciens appellent la charge q charge de test q_{test} et définissent mathématiquement le champ électrostatique comme :

$$\vec{E} = \lim_{q_{\text{test}} \to 0} \frac{\vec{F}_{1/q_{\text{test}}}}{q_{\text{test}}}$$

Champ électrostatique créé par une charge q

Considérons une charge q_1 au point $\vec{r}_1$ par rapport à une origine O. Le champ électrostatique créé au point $\vec{r}$ de l'espace par la charge q est donné par

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} \vec{u}_{\vec{r}_1 \to \vec{r}}$$

où $\vec{u}_{\vec{r}_1 \to \vec{r}}$ est le vecteur allant du point repéré par $\vec{r}_1$ (position de la charge q) vers le point $\vec{r}$ (où l'on veut mesurer le champ électrique).

Ce vecteur unitaire peut donc s'écrire sous la forme :

$$\vec{u}_{\vec{r}_1 \to \vec{r}} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}$$

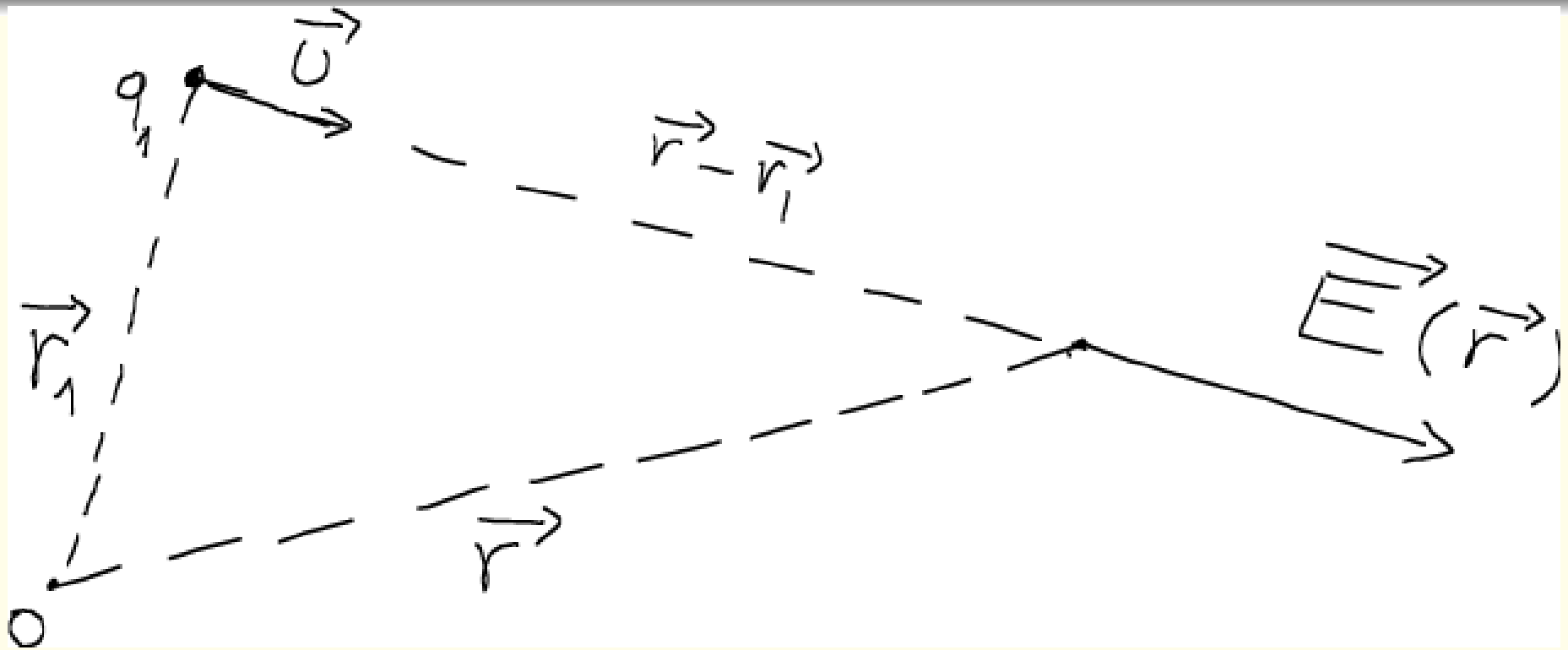


Figure : Champ électrostatique créé par une charge électrique q_1.

L'expression du champ électrostatique créé au point $\vec{r}$ par la charge q placée en $\vec{r}_1$ devient donc :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}-\vec{r}_1)$$

Le champ $\vec{E}(\vec{r})$ est appelé champ électrostatique car créé par des charges statiques (immobiles) (pour le distinguer d'un champ électrique créé par des charges mobiles) et est mesuré en $\frac{N}{C}$ ou plus précisément en $\frac{Volt}{m}$.

Propriétés du champ électrostatique

1. le champ électrostatique créé par une charge électrique est radial (porté par la droite entre la charge et le point où l'on veut mesuré le champ)
2. Dans le cas d'une charge électrique positive, le champ électrostatique est divergent, c'est à dire que son vecteur pointe de la charge électrique qui l'a créé vers l'extérieur.
3. Dans le cas d'une charge électrique négative, le champ électrostatique est convergent, c'est à dire que son vecteur pointe de l'extérieur vers la la charge électrique qui l'a créé.
4. Le module du champ électrostatique décroit en $\frac{1}{(\text{distance})^2}$ en s'éloignant de la charge.

C'est ainsi qu'une charge q_2 placée en $\vec{r}_2$ subit une force électrostatique $\vec{F}_{q_1/q_2}$ de la part de q_1 égale à :

$$\vec{F}_{q_1/q_2} = q_2\,\vec{E}(\vec{r}_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2\,q_1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)$$

Un ensemble de N charges électriques placées en $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_N$, respectivement, créent un champ électrique au point $\vec{r}$, $\vec{E}(\vec{r})$, égal à :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

Ce résultat est obtenu en appliquant le principe de superposition, à savoir : le champ électrique créé par un ensemble de charges est la somme vectorielle des champs électriques créés chacun par une charge de l'ensemble.

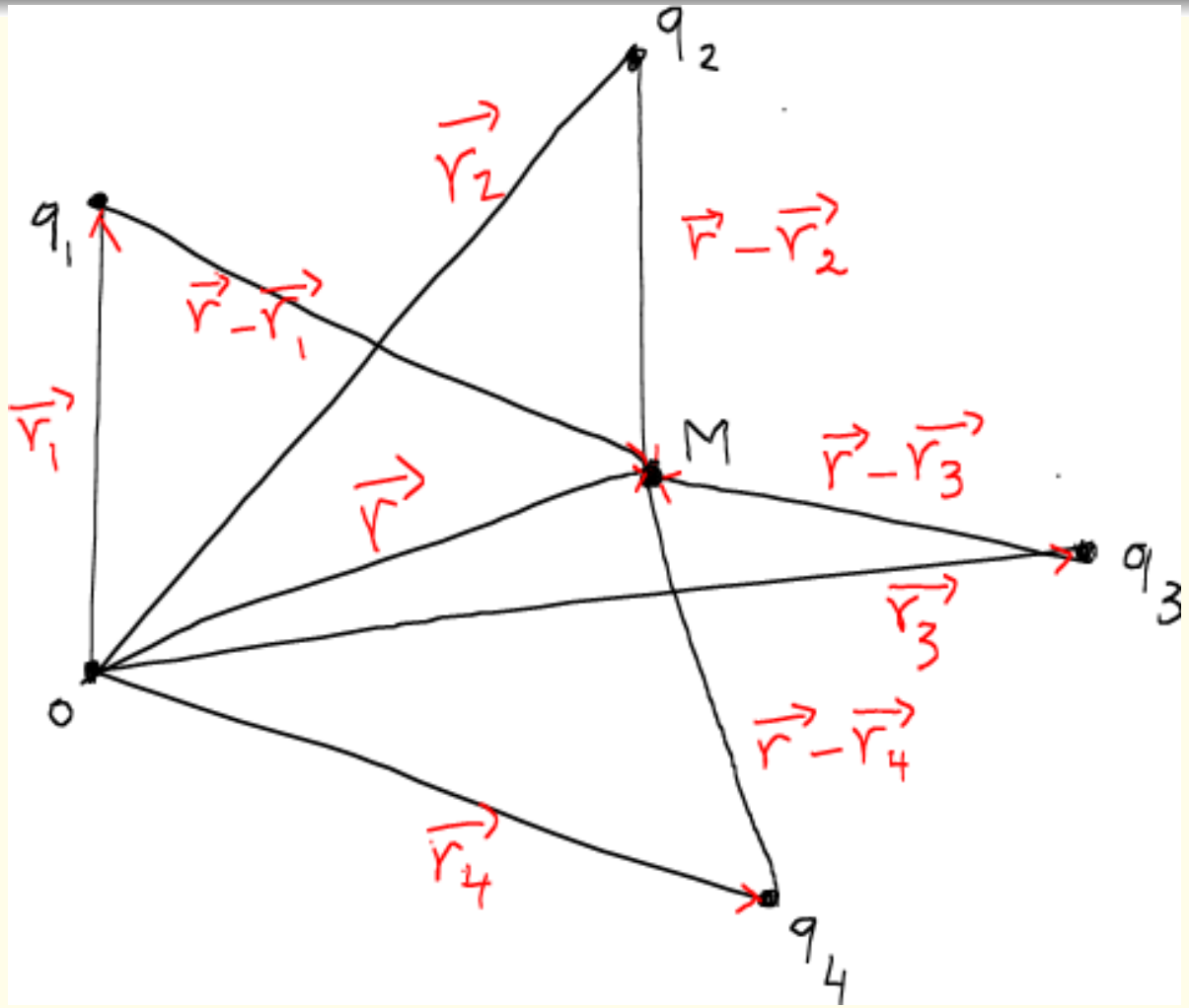


Figure : Champ électrique créé par 4 charges électriques

Champ électrostatique créé par une distribution continue

Dans le cas d'une distribution continue de charges électriques, on parle plutôt d'un élément de quantité de charge dq placée dans une région centrée autour du vecteur $\vec{r'}$ qui va créer en un point $\vec{r}$ de l'espace un élément de champ électrostatique égal à :

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}(\vec{r}-\vec{r'})$$

Si la charge totale considérée est distribuée sur un volume, on aura :

$$dq = \rho(\vec{r'})\,dV$$

où $\rho(\vec{r'})$ est la densité volumique de la charge électrique au point $\vec{r'}$ et dV l'élément de volume contenant la charge dq et centré autour du vecteur $\vec{r'}$.

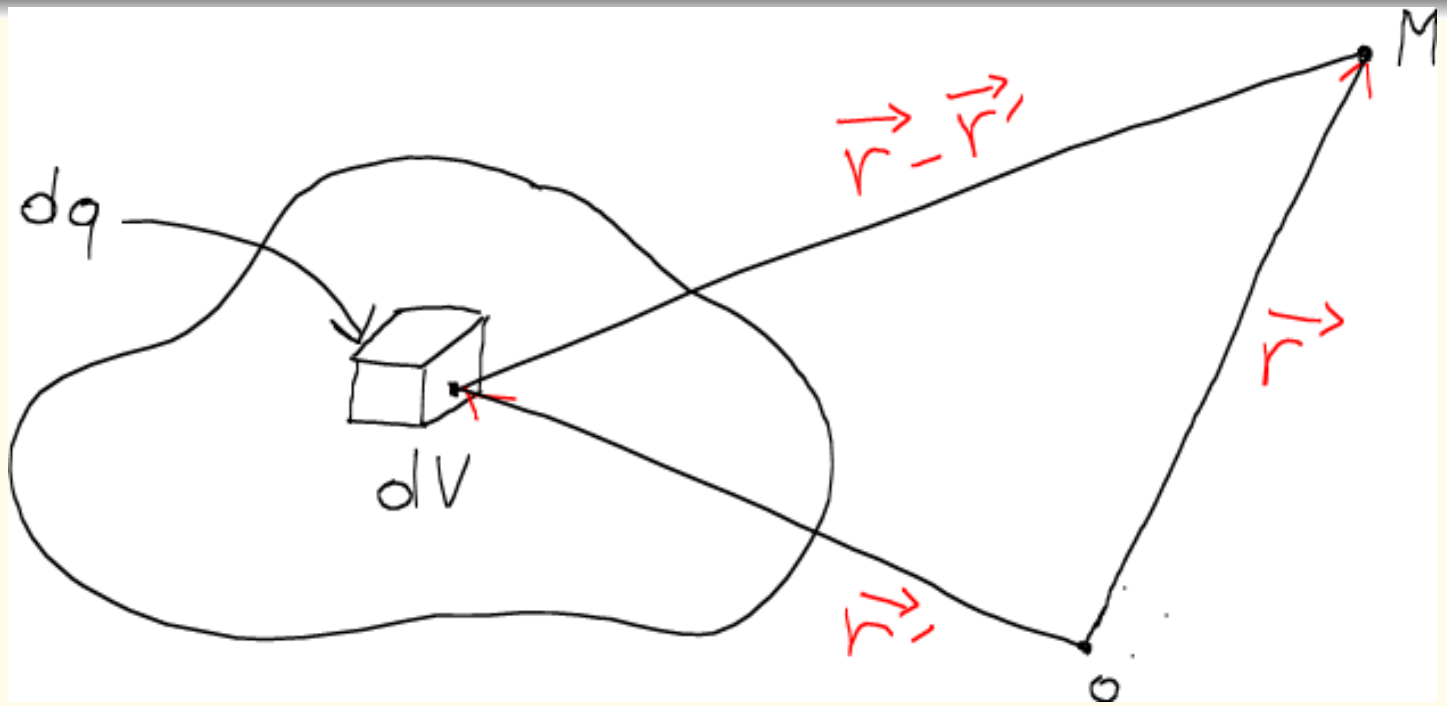


Figure : Champ électrique créé par une distribution continue de charges électriques

L'élément du champ électrostatique s'écrit donc :

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\vec{r'})\,dV}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}(\vec{r}-\vec{r'})$$

et le champ électrostatique créé par la totalité de la charge contenue dans un volume V est donné par :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho(\vec{r'})\,dV}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}(\vec{r}-\vec{r'})$$

Si la charge totale considérée est distribuée sur une surface, on aura :

$$dq = \sigma(\vec{r'})\, dV$$

où $\sigma(\vec{r'})$ est la densité surfacique de la charge électrique au point $\vec{r'}$ et dS l'élément de surface contenant la charge dq et centré autour du vecteur $\vec{r'}$.

Le champ électrostatique créé par la totalité de la charge contenue dans une surface S est donné par :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(\vec{r'})\, dS}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} (\vec{r} - \vec{r'})$$

Si maintenant la charge totale considérée est distribuée sur une longueur (un fil), on aura :

$$dq = \lambda(\vec{r'})\, d\ell$$

où $\lambda(\vec{r'})$ est la densité linéique de la charge électrique au point $\vec{r'}$ et $d\ell$ l'élément de longueur contenant la charge dq et centré autour du vecteur $\vec{r'}$.

Le champ électrostatique créé par la totalité de la charge contenue dans une longueur L est donné par :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_L \frac{\lambda(\vec{r'})\, d\ell}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} (\vec{r} - \vec{r'})$$

Le champ électrostatique créé par la totalité de la charge contenue dans une longueur L est donné par :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_L \frac{\lambda(\vec{r'})\, d\ell}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} (\vec{r} - \vec{r'})$$

Lignes de champ électrostatique

Ce sont des courbes orientées telles que leurs tangentes, en tout point, ont la même direction et le même sens que le champ électrique.

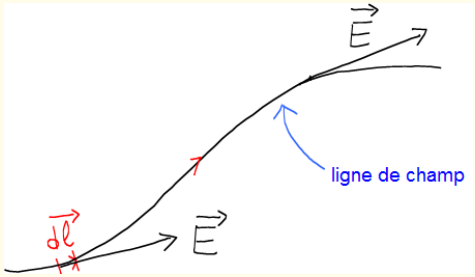


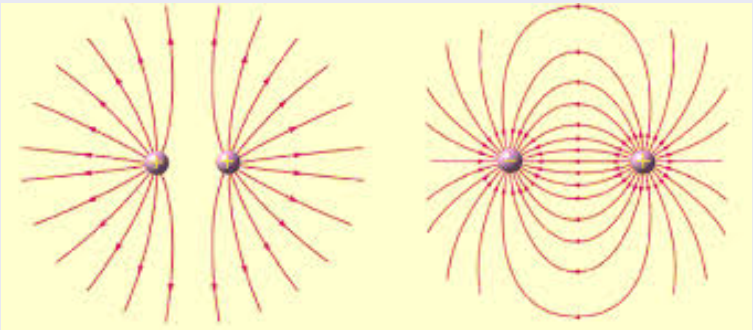
Figure : Lignes de champ électrostatique

1. Les lignes du champ électrostatique ne se coupent jamais, car si, au contraire, deux lignes se coupent, le champ électrostatique est, au point d'intersection, tangent à deux lignes différentes ; ce qui est impossible !
2. Mathématiquement, l'équation d'une ligne de champ est obtenue en remarquant qu'en tout point sur la ligne, un élément de déplacement infinitésimal, $d\vec{\ell}$, est parallèle au champ électrostatique $d\vec{E}$, soit :

$$d\vec{\ell} \wedge d\vec{E} = \vec{0}$$

3. Tracer les lignes de champ électrostatique est une manière très instructive de visualiser la structure de ce dernier dans l'espace (variation de son module et de son sens en tout point de l'espace.)

4. Entre deux charges électriques de même signe, il existe toujours un point où le champ électrostatique est nul.



5. Les lignes de champ électrostatique ne sont pas des trajectoires de charges électriques placées dans ce champ (sauf si les lignes de champ sont des droites) car une charge, placée en un point sur une ligne, va subir une accélération tangentielle (due à la force engendrée par le champ électrostatique en ce même point) qui va la ramener sur une ligne voisine.

6. Une autre manière de voir la structure du champ électrostatique consiste à connecter les flèches de vecteurs tout en éliminant l'indication du sens du vecteur, ce qui peut prêter à penser qu'on pourrait, ainsi, perdre l'information sur l'intensité (module) du champ. Il n'en est rien de cela ! Car il est possible d'avoir une idée sur l'intensité du champ électrostatique en examinant la densité de lignes de champ électrostatique (nombre de lignes traversant une surface donnée) : celle-ci est grande au voisinage de la charge électrique (dans le cas d'une seule charge) où les lignes de champ sont très proches, et petite en s'éloignant de la position de la charge électrique, tellement les lignes sont dispersées.
   Ainsi, on trace à partir d'une charge électrique q un nombre fini de lignes (8 lignes, par exemple). Pour être cohérent dans notre démarche (car le module du champ électrostatique est proportionnelle à la charge électrostatique !), on doit tracer $2 \times 8 = 16$ lignes émanant d'une charge $2q$.

On doit ensuite calculer le nombre de lignes qui sortent d'une surface fermée autour de la charge q (densité de lignes).

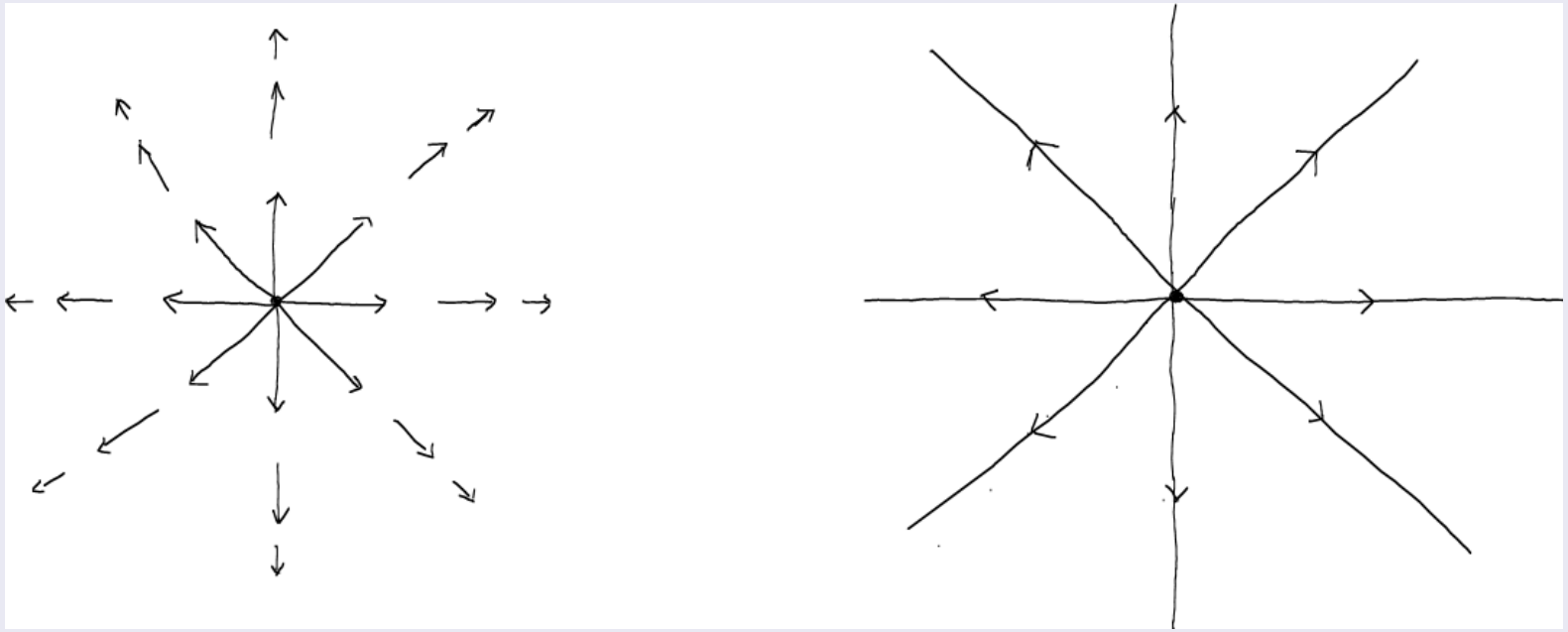


Figure : Deux manières de considérer la structure d'un champ électrostatique

Théorème de Gauss

La méthode directe (en utilisant la loi de Coulomb) s'avère très difficile à appliquer dans beaucoup de situations physiques. En vue de contourner ce problème, les physiciens ont cherché d'autres méthodes plus intelligentes et moins onéreuses pour calculer d'une manière beaucoup plus facile le champ électrostatique. Parmi ces méthodes, il y a le théorème dit de Gauss (physicien allemand (1777-1855)).

Pour donner une idée sur ce théorème, commençons par calculer le flux du champ électrostatique $\vec{E}$ créé par une charge électrique q placée en O, à travers la surface d'une sphère de rayon R (contenant la charge). En effet, ce flux Φ est donné par :

$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

ou encore, en utilisant l'expression $\vec{E}(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\vec{u}_r$:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint \frac{q}{R^2}\vec{u}_r \cdot dS_r\vec{u}_r$$

avec $dS_r = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$, ce qui donne :

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Le flux du champ électrostatique $\vec{E}$ à travers la surface fermée d'une sphère de rayon R ne dépend pas du rayon de la sphère.

Ce résultat peut être expliqué par le fait que le nombre de lignes du champ émanant de la charge ne change pas lorsque l'on change la surface à travers laquelle on mesure le flux de $\vec{E}$.

Cette remarque peut suggérer que la mesure du flux d'un champ à travers une surface fermée peut nous renseigner sur la quantité de charges contenue dans le volume délimité par la surface fermée.

En fait, toute surface fermée de forme quelconque peut donner le même résultat. C'est l'essence même du théorème dit de Gauss, qui s'énonce comme suit :

le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée *quelconque* est égal, dans le vide, à $\frac{1}{\varepsilon_0}$ fois la charge électrique Q_{int} contenue à l'intérieur du volume délimité par cette même surface, à savoir :

$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Démonstration simple du thèorème de Gauss

Considérons une charge électrique q placée au centre de deux sphères concentriques de rayons R_1 et R_2, telle que $R_1 < R_2$. On vient de voir que le flux à travers les deux surfaces sphériques du champ électrostatique $\vec{E}$ créé par la charge q est le même et est égal à $\frac{q}{\varepsilon_0}$.

Imaginons maintenant une surface fermée de forme quelconque entre les deux surfaces sphériques. Il est évident que le flux de $\vec{E}$ qui passe par les deux surfaces sphériques, tout en restant le même, passerait surement à travers la surface de forme quelconque avec la même valeur $\frac{q}{\varepsilon_0}$.

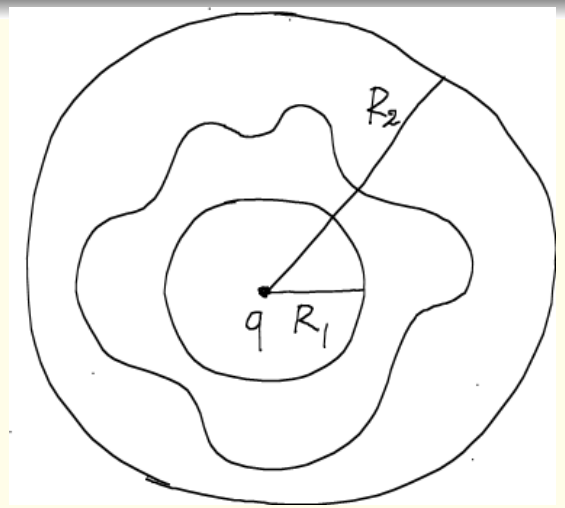


Figure : Le flux à travers les trois surfaces est le même car émanant de la même source au centre

Démonstration plus rigoureuse !

Le flux du champ électrostatique $\vec{E}$ créé par une charge q à travers un élément de surface infinitésimal $d\vec{S}$, dont l'orientation est arbitraire, est donné par :

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

où on a supposé que le champ $\vec{E}$ est presque le même sur toute la surface infinitésimale.

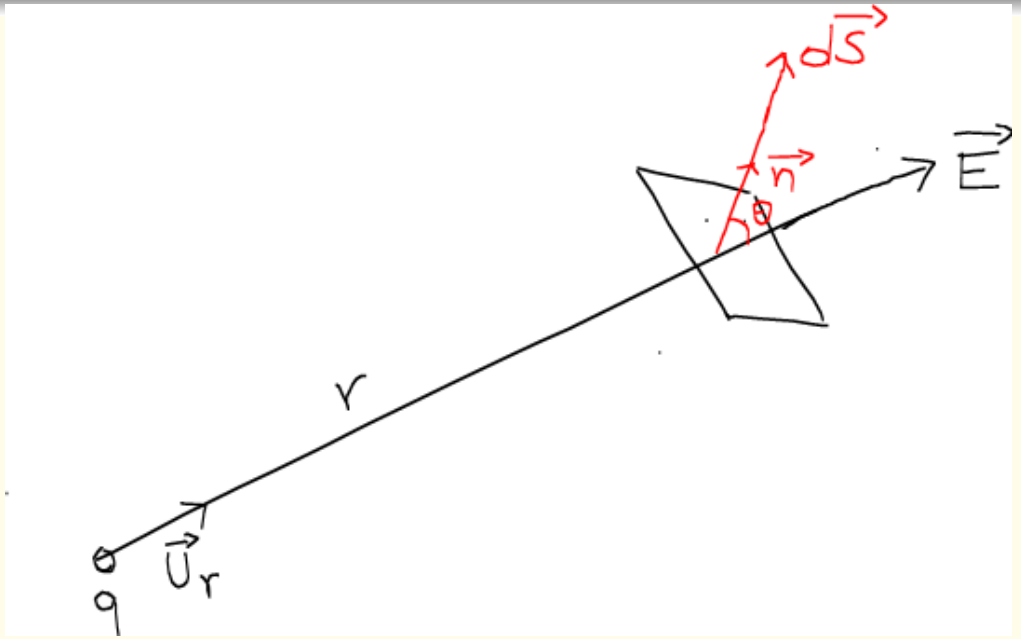


Figure : Élément de surface et champ électrostatique

avec

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r$$

où $\vec{u}_r$ est le vecteur unitaire pointant de l'origine O vers l'extérieur et porté par la droite reliant le point O au point où l'on veut mesurer le champ $\vec{E}$, et

$$d\vec{S} = dS\,\vec{n}$$

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à la surface infinitésimale considérée.

On trouve donc :

$$d\Phi = \vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{dS}{r^2}\,\vec{n}\cdot\vec{u}_r \quad \text{avec} \quad \vec{n}\cdot\vec{u}_r = \cos\theta$$

Remarquons que

$$\frac{dS}{r^2}\,\vec{n}\cdot\vec{u}_r$$

est, par définition, l'élément d'angle solide $d\Omega$ à travers lequel un observateur en O voit l'élément de surface $d\vec{S}$. On écrit donc :

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,d\Omega$$

Le flux du champ $\vec{E}$ ne dépend plus de la distance entre la charge et la surface considérée, mais dépend seulement de l'angle solide à travers lequel on voit cette surface.

En faisant la même chose pour une surface adjacente au première mais orientée de façon arbitraire, on trouve le même résultat.

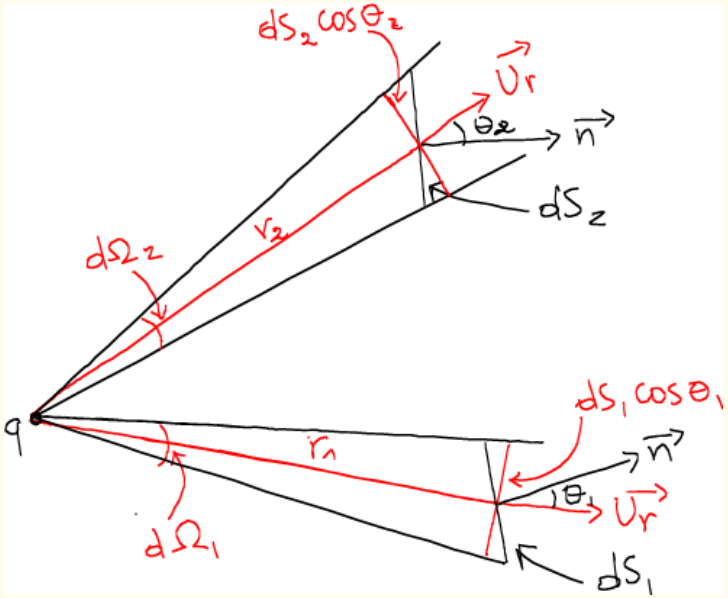


Figure : Éléments de surfaces et angles solides

Ainsi, pour balayer toute la surface fermée de forme quelconque entourant la charge q, on doit "sommer" toutes les contributions de flux à travers les surfaces élémentaires, c'est à dire :

$$\Phi = \int d\Phi = \int \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\, d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\, 4\pi$$

car l'angle solide correspondant à l'espace complet est égal à 4π.
Enfin, on obtient :

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0} \qquad \text{C.Q.F.D}$$

Corollaires du théorème de Gauss

1. le flux du champ électrique créé par une charge q à travers une surface fermée quelconque ne contenant pas la charge q est nul !
2. le flux du champ électrostatique créé par une charge q à travers une surface fermée sur laquelle est déposée la charge q est égal à :

$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{2\varepsilon_0}$$

Cette division par deux est due au fait que l'intégration de l'angle solide à partir du point où se trouve la charge doit se faire sur la moitié de l'espace ($\int d\Omega = 2\pi$) et non pas sur la totalité de l'espace ($\int d\Omega = 4\pi$) ; ce qui permet d'écrire :

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 2\pi = \frac{q}{2\epsilon_0}$$

Le flux du champ électrostatique total $\vec{E}_{\text{total}}$ créé dans le vide par un ensemble de N charges ($q_i, i = 1, \cdots, N$) à travers une surface fermée quelconque (contenant les charges) est, selon le théorème de Gauss, donné par :

$$\Phi = \iint \vec{E}_{\text{total}} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i$$

En effet, selon le principe de superposition, le champ électrostatique total $\vec{E}_{\text{total}}$ est égal, en tout point de la surface considérée, la somme des champs électrostatiques $\vec{E}_i$ créés chacun par une charge q_i de l'ensemble, telle que :

$$\vec{E}_{\text{total}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i$$

Le flux total s'écrit donc ;

$$\Phi = \iint \vec{E}_{\text{total}} \cdot d\vec{S} = \iint \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i \right) \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^{N} \iint \vec{E}_i \cdot d\vec{S}$$

Mais on sait, selon le théorème de Gauss, que :

$$\iint \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \frac{q_i}{\varepsilon_0}$$

ce qui donne finalement :

$$\Phi = \iint \vec{E}_{\text{total}} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i$$

Si l'ensemble de N charges contient des charges négatives et d'autres positives de telle façon que la somme algébrique est nulle

$$\sum_{i=1}^{N} q_i = 0$$

le flux du champ électrostatique créé par ces mêmes charges à travers une surface les contenant toutes est nul !

Dans le cas d'une distribution continue des charges à l'intérieur de la surface à travers laquelle le flux est mesurée, le théorème de Gauss s'écrit :

$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho \, dV \qquad \text{distributuon volumique,}$$

$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iint_S \sigma \, dS \qquad \text{distributuon surfacique}$$

et

$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_L \lambda \, dl \qquad \text{distributuon linéique}$$

Comment profiter du résultat donné par le théorème de Gauss

En réalité, ce qui nous intéresse le plus dans le résultat du théorème de Gauss n'est pas la valeur du flux du champ électrostatique ; bien que c'est un résultat intéressant, mais plutôt la possibilité d'obtenir facilement l'expression du champ électrostatique sur une surface donnée. Ainsi, l'égalité qui nous intéresse est bien :

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

de manière à pouvoir sortir le champ électrostatique E de l'intégrale ; ce qui nous permet de déduire son expression sur une surface fermée choisie.

Pour se faire, on doit choisir une surface d'intégration de telle sorte que :

1. le champ électrostatique $\vec{E}$ est parallèle (ou anti-parallèle) au vecteur normal à cette surface en tout point. Cela nous permet de faire le passage :

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint E\vec{u} \cdot dS\vec{n} = \iint E\, dS \qquad \text{car} \qquad \vec{u} \cdot \vec{n} = 1$$

2. le champ électrostatique $\vec{E}$ est le même sur toute la surface considérée ; ce qui nous permet de faire le passage :

$$\iint E\, dS = E \iint dS = E\, S$$

Remarque importante !

Cette liberté de choisir la surface qui nous arrange est due au fait que le théorème de Gauss est valable pour une surface fermée quelconque !

En appliquant le résultat du théorème de Gauss sur la surface fermée qui répond aux conditions précédentes (dite surface de Gauss ,S_G), on obtient :

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E\, S_G = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

ou encore, le champ électrostatique en tout point de cette surface est donné par

$$E = \frac{Q_{\text{int}}}{S_G\, \varepsilon_0}$$

Remarque

La démarche ci-dessus montre que le théorème de Gauss ne peut être appliquée qu'aux situations où le champ électrostatique possède des propriétés de symétrie (perpendiculaire à la surface en tout point, avoir la même valeur en tout point de la surface) sur des surfaces régulières (surfaces sphériques, planes, cylindriques etc$\cdots$).

Exemple d'application du théorème de Gauss

Le champ électrostatique créé par une distribution surfacique uniforme (σ constante) de charges sur un plan conducteur supposé infini ne dépend pas de la position de la charge sur le plan mais plutôt de la distance par rapport au plan.

Car selon le principe de Curie, les éléments de symétrie des causes (répartition de charges) se retrouvent dans les effets produits (champ électrostatique, potentiel, etc$\cdots$)

En effet, un élément de charge électrostatique $dq_1 = \sigma dS$ en un point A_1 sur le plan chargé crée un élément de champ $d\vec{E}_1$ en un point B au dessus (au-dessous) du plan dont la direction est portée par la droite $\overrightarrow{A_1B}$ (donc non normal au plan !), mais on peut toujours trouver un autre élément de charge électrostatique $dq_2 = \sigma dS$ en un point A_2 symétrique à A_1 par rapport à un point O sur le plan (que l'on choisit) créant en B un élément de champ $d\vec{E}_2$ dont la direction est portée par la droite $\overrightarrow{A_2B}$ (donc non normal au plan !) mais de même module que celui de $d\vec{E}_1$.

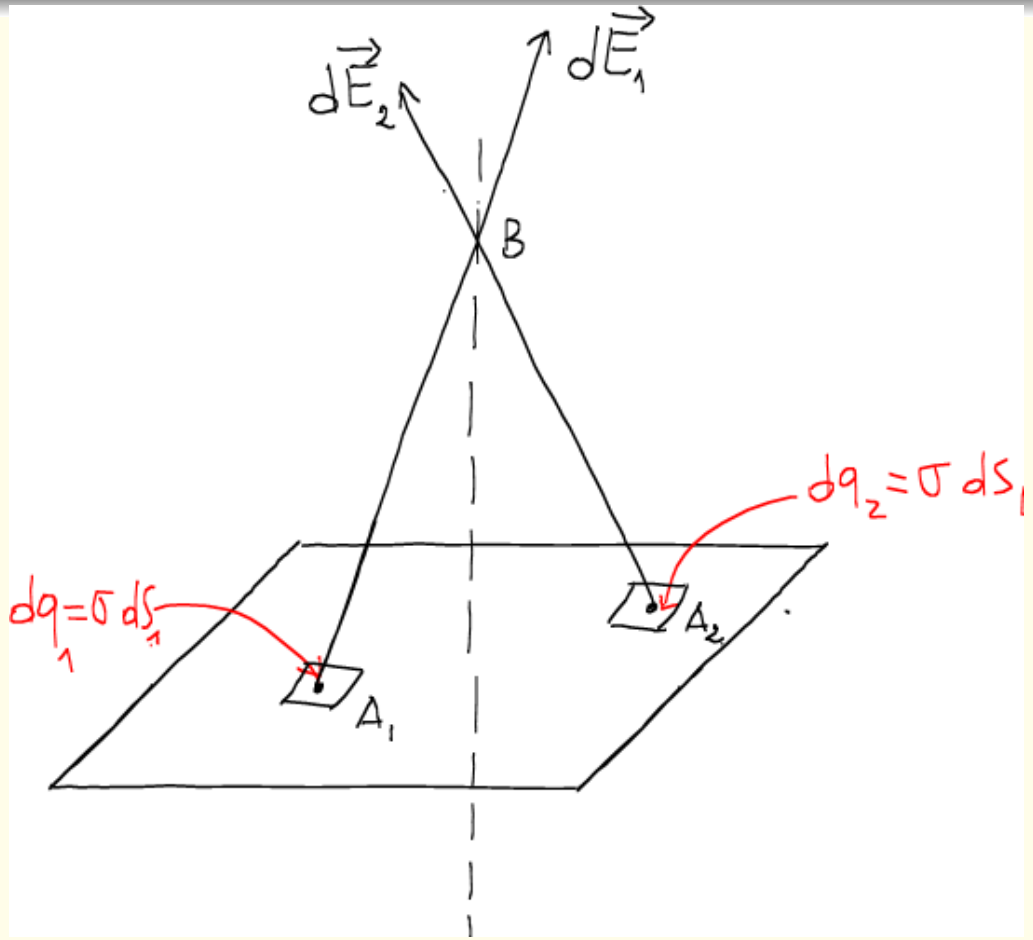


Figure : Deux éléments de charges sur un plan chargé créent en un point au dessus de ce plan deux champs électrostatiques de même module et dont le vecteur somme vectorielle est perpendiculaire au plan

Les deux champs $d\vec{E}_1$ et $d\vec{E}_2$ ont le même module car la distribution surfacique des charges sur le plan est uniforme : $dq_1 = dq_2$.

Le champ électrostatique créé en B par ces deux charges dq_1 et dq_2 est, selon le principe de superposition, la somme des champs $d\vec{E}_1$ et $d\vec{E}_2$, dont la direction est normal au plan.

On peut procéder de la même manière pour chaque deux charges symétriques jusqu'à épuiser toute la quantité de charge sur le plan. Le champ électrostatique total créé par toutes les charges est donc perpendiculaire au plan en tout point de l'espace. L'application du théorème de Gauss est donc possible, et permet d'obtenir le module du champ électrostatique.

Mathématiquement, on peut choisir un repère fixe en O (coordonnées cartésiennes) dont les axes Ox et Oy sont sur le plan contenant les charges et l'axe Oz est normal à ce plan, de telle sorte que le plan chargé a l'équation $z = 0$.

On vient de montrer que le champ électrostatique créé par le plan chargé , supposé infini, est le même en se déplaçant sur le plan (c'est une invariance par translation sur le plan Oxy). Il est aussi dirigé en tout point dans la direction Oz. Il n'a donc qu'une seule composante suivant z. On peut donc écrire

$$\vec{E}(x, y, z) = E_z(z)\vec{k}$$

On dit que le champ électrostatique a une forte symétrie car ne dépendant que d'une seule coordonnée, z.

En plus, le champ électrostatique est impair, car, par convention, ce dernier pointe toujours de la charge positive vers l'extérieur et dans le sens inverse pour une charge négative. Par conséquent, on aura

$$E(z)\vec{k} = -E(-z)\vec{k}$$

Après avoir défini la structure du champ électrostatique créé par le plan, on doit trouver maintenant l'expression exacte de ce champ. Pour cela, on applique le théorème de Gauss (car utiliser la méthode directe (loi de Coulomb) serait très difficile !) Ainsi, la surface de Gauss la plus adaptée à cette situation serait la surface d'un cylindre de sections (bases) perpendiculaires au plan et situées à des hauteurs h du même plan.

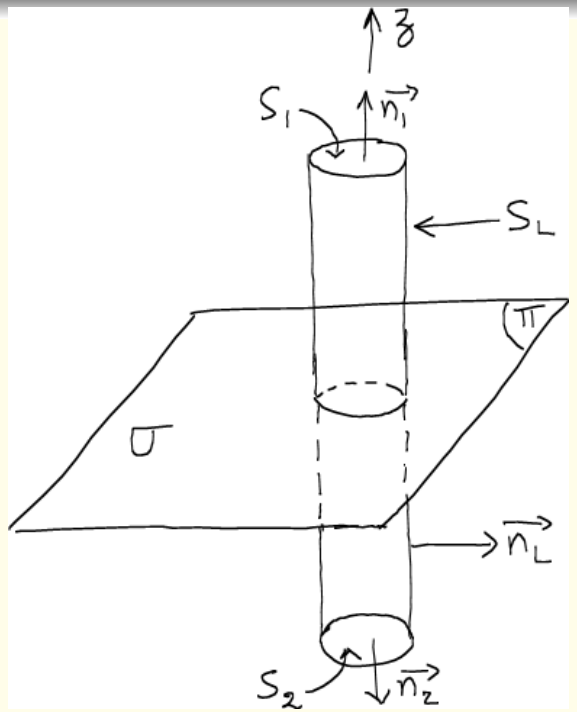


Figure : Surface de Gauss prise sous forme d'un cylindre perpendiculaire au plan chargé

Le flux du champ électrostatique créé par la quantité de charges distribuées uniformément sur la surface d'intersection du cylindre (imaginaire !) avec le plan chargé (lui, réel !) à travers la surface fermée du cylindre est, selon le théorème de Gauss, égal à :

$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 + \iint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S}_L$$

avec

$$d\vec{S}_1 = dS\vec{n}_1 = dS\vec{k},\ d\vec{S}_2 = dS\vec{n}_2 = -dS\vec{k},\ \text{et}\ d\vec{S}_L = dS_L\vec{n}_L\ (\vec{n}_L \perp \vec{k})$$

Puisque le champ électrostatique a la forme $\vec{E}(x,y,z) = E_z(z)\vec{k}$, il s'ensuit que :

$$\iint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S}_L = \iint_{S_L} E_z(z)\vec{k} \cdot dS_L \vec{n}_L = \iint_{S_L} E_z(z)\, dS_L \vec{k} \cdot \vec{n}_L = 0$$

car $\vec{n}_L \perp \vec{k}$ en tout point de la surface S_L.

D'autre part

$$\iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 = \iint_{S_1} E_z \vec{k} \cdot dS \vec{k} = \iint_{S_1} E_z(h) dS = E_z(h)\, S_1$$

car le champ électrostatique est le même sur la surface imaginaire S_1 du cylindre.

De même

$$\iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = \iint_{S_2} E_z \vec{k} \cdot dS(-\vec{k}) = \iint_{S_2} -E_z(-h) dS = E_z(h)\, S_2$$

car le champ électrostatique est le même sur la surface imaginaire S_2 du cylindre.

Ce qui donne enfin

$$\Phi = E_z(h)\, S_1 + E_z(h)\, S_2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

où $Q_{\text{int}} = \sigma S$ est la charge répartie sur la surface d'intersection du cylindre avec le plan chargé, S.

On sait aussi que $S_1 = S_2 = S$, d'où :

$$\Phi = 2\,E_z(h)\,S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0},$$

et l'expression de la composante du champ électrostatique suivant l'axe Oz créé par plan infini uniformément chargé s'écrit :

$$E_z(h) = \frac{\sigma S}{2\,S\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}$$

La composante E_z du champ électrostatique est indépendante de z. L'expression du champ électrostatique s'écrit donc :

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{k} \quad \text{pour} \quad z > 0$$

et

$$\vec{E}(x,y,z) = -\frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{k} \quad \text{pour} \quad z < 0$$

Le champ électrostatique n'est pas constant en tout point de l'espace car, en pratique, il n'existe pas de plans chargés infinis ! Mais on peut prendre, avec une bonne approximation, le résultat ci-dessous pour vrai, et ce pour des distances au dessus (au dessous) du plan qui sont très petites devant la distance linéaire (longueur ou largeur) du plan chargé !

On peut maintenant utiliser ce résultat pour calculer le champ électrostatique créé par deux plans parallèles uniformément chargés, l'un positivement (σ constant) et l'autre négativement ($-\sigma$).

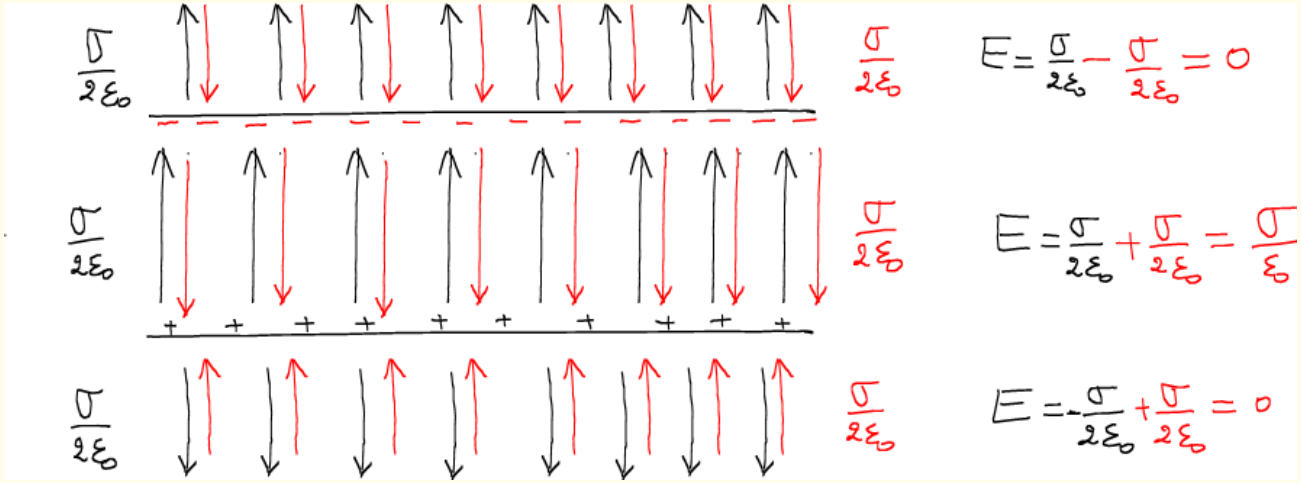


Figure : La structure du champ électrostatique créé par deux plans parallèles supposés infinis et de charges de polarité opposée

En effet, le plan chargé positivement va créer dans l'espace un champ électrostatique, de module constant, dirigé, perpendiculairement au plan, des charges positives vers l'extérieur, alors que celui chargé négativement va créer un champ électrostatique de même module, dirigé, perpendiculairement au plan, de l'extérieur vers les charges négatives.

Il est évident que le champ électrostatique créé à l'extérieur des deux plans est nul, car il s'agit, selon le principe de superposition, de faire la somme de deux vecteurs de même module mais dans deux sens opposés.

Alors que les vecteurs des deux champs électrostatiques entre les deux plans s'ajoutent et donnent un vecteur non nul de module

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

et dirigé du plan chargé positivement vers le plan chargé négativement.

Remarque importante

A la limite des plans (armatures), il n'est pas question de supposer que le plan est infini. Par conséquent, le champ électrostatique ne sera plus constant et parfaitement perpendiculaire aux plans (disparition des symétries du champ, appelée brisure de symétrie). Dans ce cas, le théorème de Gauss ne peut être de grande utilité !

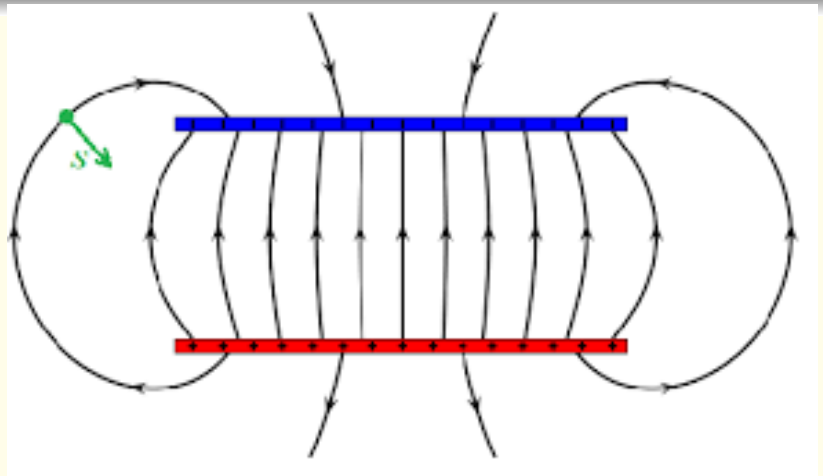


Figure : La structure du champ électrostatique à la limite des armatures d'un condensateur

Remarque importante

James Clerck Maxwell (1831-1879), un physicien écossais, a pu obtenir la configuration des lignes de champ électrostatique à la limites d'armatures chargées.

Forme locale du théorème de Gauss

Selon le théorème de Gauss, on a (dans le vide)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint \rho(\vec{r}) dV$$

où$\rho(\vec{r})$ est la densité volumique de la charges et dV l'élément de volume appartenant au volume contenant la charge électrique.

D'autre part, selon le théorème de Stokes on a

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV$$

ce qui donne

$$\iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint \rho(\vec{r}) dV$$

qui peut se mettre sous la forme

$$\iiint \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}\right] dV = 0$$

Puisque le théorème de Gauss est valable pour un volume arbitraire (infiniment petit ou infiniment grand), on peut toujours trouver un volume très petit dans lequel la divergence de $\vec{E}$ est constante ainsi que la densité volumique des charges (ou presque !). Cela nous permet de sortir l'intégrande de l'intégrale :

$$\left[\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}\right] \iiint dV = 0$$

Bien que le volume choisi est infiniment petit il reste comme même de valeur finie différente de zéro. Par conséquent :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} = 0$$

ou encore

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Ceci est la forme locale du théorème de Gauss.

Cette expression du théorème de Gauss est dite locale car elle donne la forme du champ électrique $\vec{E}$ en tout point de l'espace (localement !)

Potentiel électrostatique

En connaissant la densité de charges électriques dans un milieu, il est possible d'évaluer le champ électrostatique en utilisant la loi de Coulomb :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r'})}{\left|\vec{r} - \vec{r'}\right|^3} (\vec{r} - \vec{r'}) d\vec{r'}$$

mais, il se trouve que, généralement, on ne connait pas la distribution des charges électriques ! C'est le cas des condensateurs et des bobines. Pour cette raison, et pour bien d'autres, il est utile de définir un nouveau concept qui nous permet de contourner ce problème, à savoir : le potentiel électrostatique créé par une distribution de charges.

En effet, en physique le travail est défini comme l'énergie fournie pour mettre en mouvement un objet dans un champ de forces :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

où $d\vec{\ell}$ est l'élément de déplacement de l'objet dans l'espace où règne une force $\vec{F}$.

Si la force dérive d'un potentiel : $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$, la seconde loi de Newton s'écrit sous la forme :

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla} U$$

ou encore, en multipliant les deux termes de l'équation par $d\vec{r}$,

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot d\vec{r} = -\vec{\nabla} U \cdot d\vec{r} = -dU$$

ce qui peut encore s'écrire sous la forme :

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt = -dU$$

tout en remarquant que

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2\right]$$

d'où :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2\right]dt = -dU$$

ce qui donne enfin :

$$dE_c = -dU$$

où E_c est l'énergie cinétique de l'objet en mouvement.

L'objet prend donc de l'énergie potentielle qui se transforme en une énergie cinétique tout en conservant son énergie totale :

$$d(E_c + U) = 0$$

Soit une charge électrique Q fixe en un point O. Une charge q en un point A, repéré par le vecteur position $\vec{r}_A$ de O subit de la part de la charge Q une force électrostatique égale à :

$$\vec{F}_{Q/q} = q\,\vec{E}(\vec{r}_A)$$

, où $\vec{E}(\vec{r}_A)$ est le champ électrostatique créé par la charge Q en $\vec{r}_A$.

Cela signifie que la charge q aura une accélération,

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{Q/q}}{m} = \frac{q}{m}\,\vec{E}(\vec{r}_A)$$

(c'est à dire un mouvement vers la charge Q si les deux charges sont de polarité différente, et dans le sens inverse si les charges sont de même polarité)

Donc, pour maintenir la charge q dans sa position (l'empêcher de se mouvoir), on doit compenser la force $\vec{F}_{Q/q}$ par une force extérieure

$$\vec{F}_{\text{ext}} = -\vec{F}_{Q/q} = -q\,\vec{E}(\vec{r}_A)$$

de telle façon que la somme des forces appliquées sur la charge q soit nulle :

$$\vec{F}_{\text{ext}} + \vec{F}_{Q/q} = -\vec{F}_{Q/q} + \vec{F}_{Q/q} = \vec{0}$$

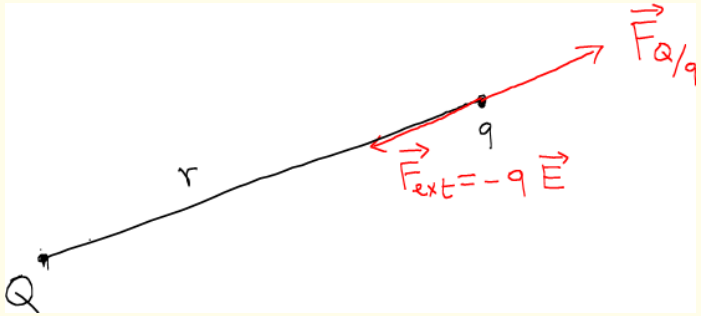


Figure : La force extérieure appliquée sur une charge q pour l'immobiliser en présence d'une charge Q

Curieusement, bien qu'on applique une force pour immobiliser la charge q, (donc un effort !) cela n'est pas comptabilisé, d'un point de vue physique, comme un travail fourni !

Maintenant, on veut déplacer la charge q, initialement et A, vers un point B, repéré par $\vec{r}_B$, tout en gardant la charge Q en O. Pour se faire, on doit, en tout instant, combattre le force appliquée par Q sur q pour déplacer cette dernière le long du chemin voulu. Nous devons donc fournir un travail (énergie) pour ramener la charge q du point A vers le point B, égal à :

$$W^{\text{ext}}_{\text{A}\to\text{B}} = \int_A^B \vec{F}_{\text{ext}} \cdot d\vec{\ell} = -q \int_A^B \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{\ell}$$

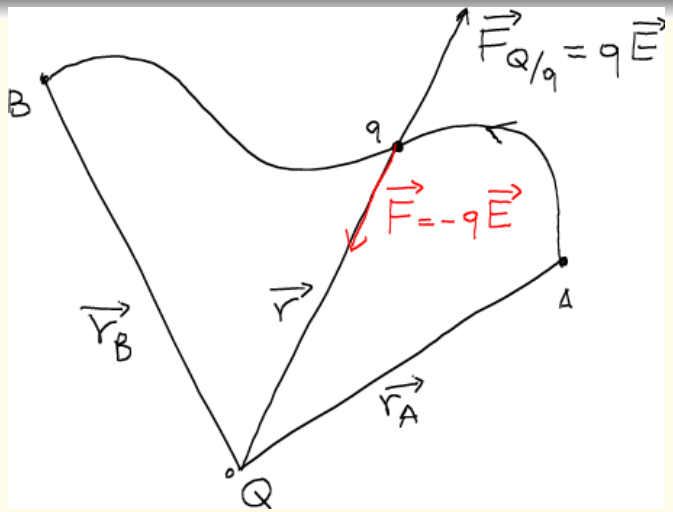


Figure : La force électrostatique que doit combattre une charge q le long d'une trajectoire de A à B en présence d'une charge Q

On peut avoir, par endroits, la force appliquée par Q sur q, $\vec{F}_{Q/q}$, dirigée exactement dans le sens où l'on veut déplacer la charge q. Dans ce cas, nous laissons la charge Q déplacer la charge q sans que nous fournissions le moindre travail !

Dans le cas contraire où la force appliquée par Q sur q est exactement dans le sens contraire du déplacement de la charge q, nous devons appliquer une force égale mais dans le sens opposé de la force $\vec{F}_{Q/q}$.

Entre ces deux cas extrêmes, la force qu'on doit appliquée est moins intense !

On peut comprendre ceci de la manière suivante : en appliquant la force $\vec{F}_{\text{ext}} = -\vec{F}_{Q/q}$, la charge q devient libre, ce qui la rend facile à déplacer sans force !

Dans le système de coordonnées sphériques (le plus approprié pour cette situation), l'élément de déplacement s'écrit

$$d\vec{\ell} = dr\vec{u}_r + r\,d\theta\vec{u}_\theta + r\,\sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi$$

et le champ électrostatique

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,\vec{u}_r,$$

ce qui permet d'écrire

$$W^{\text{ext}}_{\text{A}\to\text{B}} = -q\int_A^B \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,\vec{u}_r\cdot(dr\vec{u}_r + r\,d\theta\vec{u}_\theta + r\,\sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi)$$

car

$$\vec{u}_r\cdot\vec{u}_\theta = \vec{u}_r\cdot\vec{u}_\varphi = 0$$

Après intégration, on obtient

$$W^{\text{ext}}_{\text{A}\to\text{B}} = -\frac{q\,Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2} = \frac{q\,Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right]$$

Ceci est un résultat un peu étrange, car si jamais on change de chemin entre les points A et B, le résultat du travail fourni $W^{\text{ext}}_{\text{A}\to\text{B}}$ restera le même, puisqu'il dépend seulement des positions initiale et finale de la charge q (modules des vecteurs positions r_A et r_B) et non pas du chemin parcouru entre les points A et B !

Il est intéressant de voir ce travail fourni par nous même, comme une énergie potentielle reçue par la charge en la déplaçant de A vers B.

C'est comme si vous soulevez un caillou à partir du sol puis vous le maintenez à une certaine hauteur ; le caillou aurait donc reçu dans sa position actuelle une énergie potentielle, car si jamais vous le lâchez, il tombera (une énergie potentielle convertie en une énergie cinétique) !

Si maintenant, on veut ramener la charge q très éloignée de B (placée à l'infini : $r_A \to \infty$ ou encore $\dfrac{1}{r_A} \to 0$) vers le point B, on devrait fournir un travail égal à :

$$W^{\text{ext}}_{\text{A}\to\text{B}} = \frac{q\,Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_B}\right] = \frac{q\,Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - 0\right] = \frac{q\,Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_B}$$

C'est donc l'énergie potentielle reçue par la charge q quand elle ramenée, en présence de la charge Q, de l'infini vers le point B repéré par le vecteur $\vec{r}_B$.

Par définition, la quantité

$$\frac{W^{\text{ext}}_{\text{A}\to\text{B}}}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_B}$$

est appelée potentiel électrostatique créé par la charge électrique Q, placée en O (origine), au point B repéré par le vecteur $\vec{r}_B$, et notée $V(\vec{r}_B)$ (mesuré en $\frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}}$ ou encore en Volt).

Le potentiel électrostatique est une grandeur scalaire qui ne dépend que de la charge Q (source) et de la position du point où l'on veut mesurer ce potentiel.

Remarquons l'analogie de la définition du champ électrostatique

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_{Q/q}}{q} = \frac{\text{force}}{\text{charge électrique}}$$

avec celle du potentiel électrostatique :

$$V(\vec{r}) = \frac{W^{\text{ext}}_{\text{A}\to\text{B}}}{q} = \frac{\text{énergie potentielle}}{\text{charge électrique}}$$

D'une façon générale, une charge électrique Q, placée en $\vec{r'}$, crée en $\vec{r}$ un potentiel électrostatique dans le vide égal à :

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}$$

Attention

Le concept du potentiel électrostatique est défini avec la supposition qu'à l'infini ce potentiel est nul ! (pas de charges à l'infini)

En tenant compte de la définition du potentiel électrostatique, l'expression du travail nécessaire pour ramener une charge q de A vers B en présence de la charge Q en O s'écrit donc :

$$W^{\text{ext}}_{\text{A}\to\text{B}} = \frac{q\,Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right] = q\left[V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A)\right]$$

La quantité $V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A)$ est appelée différence de potentiel électrostatique (d.d.p) :

$$V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A) = \frac{W^{\text{ext}}_{\text{A}\to\text{B}}}{q} = \frac{-q\int_A^B \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{\ell}}{q}$$

ou encore

$$V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A) = -\int_A^B \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{\ell}$$

La différence de potentiel électrostatique est une grandeur absolue, c'est à dire qu'on peut la mesurer, sans équivoque, dans un laboratoire, alors que le potentiel électrostatique est une grandeur relative, définie par rapport à un point (sa valeur dépend de la référence choisie !)

Rappelons que

$$V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A) = \int_{V_B}^{V_A} dV = \int_{V_B}^{V_A} \vec{\nabla} V \cdot d\vec{\ell} = -\int_{A}^{B} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{\ell}$$

Supposons maintenant que les points A et B sont tellement proches l'un de l'autre que le champ électrostatique est constant le long de la trajectoire entre $\vec{r}_B$ et $\vec{r}_A$ (l'élément de déplacement $d\vec{\ell} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$), de telle sorte qu'on peut enlever les signes d'intégrale :

$$\vec{\nabla} V \cdot d\vec{\ell} = -\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{\ell}$$

Par identification, on trouve

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\, V(\vec{r}) = -\overrightarrow{grad}\, V(\vec{r})$$

valable en tout point de l'espace, et où $V(\vec{r})$ est le potentiel électrostatique créé par une charge ou un ensemble de charges en un point $\vec{r}$.

Cette relation est très utile pour le calcul du champ électrostatique, puisqu'elle permet de dériver une grandeur vectorielle, $\vec{E}(\vec{r})$, à partir d'une grandeur scalaire, $V(\vec{r})$.

Autrement dit, il serait plus utile d'avoir l'information sur la structure du champ électrostatique créé par des charges électriques sous forme d'un scalaire (une seule valeur par point) que de l'avoir sous forme d'un vecteur (trois valeurs pour chaque point).

Mais comment est-il possible de condenser toute l'information concernant une grandeur vectorielle $\vec{E}(\vec{r})$ (trois composantes) en une grandeur scalaire $V(\vec{r})$ (une seule valeur) ?

La réponse réside dans le fait que le champ électrostatique $\vec{E}(\vec{r})$ créé par une charge électrique (ou un ensemble de charges) a une structure simple qui vérifie la relation :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$$

D'ailleurs, cette relation faisant intervenir le champ électrique peut être utilisée pour vérifier si ce champ est le résultat d'une distribution de charges statiques.

En effet, en écrivant

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V,$$

il est démontré que

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} V)$$

est un vecteur nul quelque soit la forme de V !

Puisque

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$$

L'intégrale sur une surface S quelconque (non fermée) de cette quantité est nulle :

$$\iint_S \vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$$

Selon le théorème de Stokes, cela devient :

$$\iint_S \vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{r}) = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

où C est le contour d'intégration délimitant la surface d'intégration S.

Ce résultat nous dit que la circulation d'un champ électrostatique dérivant d'un potentiel électrostatique V le long d'un contour fermé est nulle (circulation conservative)

En effet, si on multiplie la circulation du champ électrostatique le long d'un contour fermé C par une charge q on obtient l'expression du travail de la force appliquée sur la charge pour la déplacer le long de ce contour, à savoir :

$$W = \oint_C q\,\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Cela veut dire que pour déplacer cette charge q on doit fournir un travail dans une région où nous devons combattre la force électrique régnant dans cette région, mais il se trouve que le long de notre chemin il existe une autre région où la force électrique va nous aider dans notre tâche de telle façon que l'énergie fournie auparavant est maintenant récupérée !

Le potentiel électrostatique créé au point $\vec{r}$ dans le vide par un ensemble discret de N charges électriques $(q_i,\ i = 1, \cdots, N)$, placées, respectivement, dans les positions $(\vec{r}_i,\ i = 1, \cdots, N)$ est donné par :

$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Dans le cas d'une distribution continue, le potentiel électrostatique créé au point $\vec{r}$ dans le vide est donné par

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_\tau \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} d\tau$$

où $\rho(\vec{r'})$ est la distribution volumique de la charge électrique sur un élément de volume $d\tau$ dont le centre est repéré par le vecteur $\vec{r'}$ et $\vec{r}$ le vecteur du point où l'on veut mesurer le potentiel électrostatique $V(\vec{r})$. (on a utilisé le volume τ au lieu de V pour ne pas le confondre avec le potentiel V)

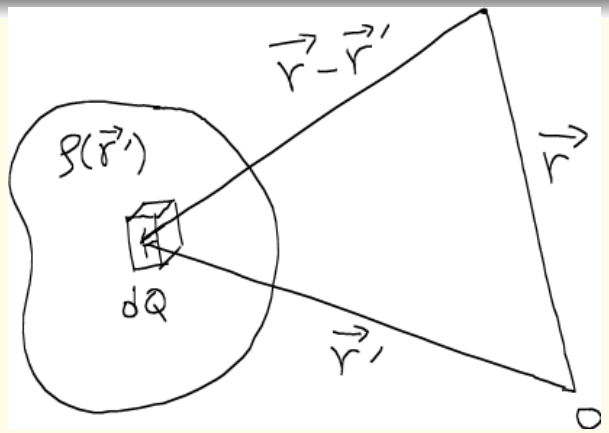


Figure : Structure d'une charge continue créant un potentiel électrostatique en un point de l'espace

Énergie électrostatique

Ramener une charge Q de l'infini à un point fixé dans un espace non chargé ne nous coûte rien en énergie, car il n'existe aucune force électrique à combattre sur le chemin suivi par la charge Q.

Cette même charge Q à l'origine o va créer dans un point $\vec{r}$ de l'espace un potentiel électrostatique :

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

en supposant qu'à l'infini le potentiel électrostatique est nul !

On veut maintenant ramener une deuxième charge électrique q de l'infini pour la mettre à une distance r de la charge Q. Pour le faire, on doit vaincre, la force électrique appliquée par la charge Q sur q en tout point du chemin suivi par q.

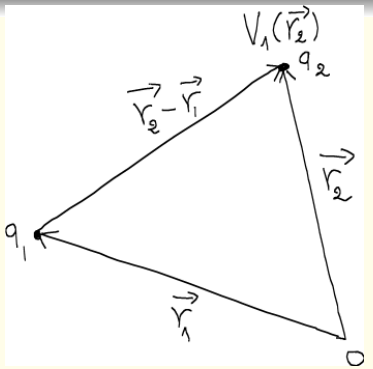


Figure : Répartition spatiale de deux charges discrètes en vue de calculer l'énergie électrostatique des deux charges

L'énergie potentielle qu'acquiert la charge q en étant en $\vec{r}$ en présence de Q en o est, par définition, donnée par :

$$E_P^q \equiv qV_Q(\vec{r}) = q\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} = \frac{q\,Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

où $V_Q(\vec{r})$ est le potentiel électrostatique créé par la charge Q en $\vec{r}$.

Cela veut dire aussi que pour ramener une charge q de l'infini vers une position $\vec{r}$ d'une charge Q à l'origine o, on doit "dépenser" une énergie égale à

$$E_P^q = \frac{q\,Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

Cette énergie restera emmagasinée dans le système constitué des deux charges, q et Q, tant que celles-ci resteront maintenues dans leurs positions respectives.

Cas de trois charges

Supposons maintenant qu'on ait ramené une charge q_1 au point $\vec{r}_1$. Cela ne coûte rien en énergie car l'espace st vide de toute force électrique à combattre. Si, maintenant, on ramène une deuxième charge q_2 de l'infini pour la mettre au point $\vec{r}_2$, on doit donc fournir une énergie électrostatique égale à l'énergie potentielle qu'acquiert la charge q_2 en $\vec{r}_2$ en présence de la charge q_1 en $\vec{r}_1$, à savoir :

$$E_P^{q_2} = q_2\, V_1(\vec{r}_2)$$

où $V_1(\vec{r}_2)$ est le potentiel électrostatique créé par la charge q_1 à l'endroit où se trouve q_2, c'est à dire $\vec{r}_2$, avec

$$V_1(\vec{r}_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{12}}$$

avec $r_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ la distance entre les charges q_1 et q_2.

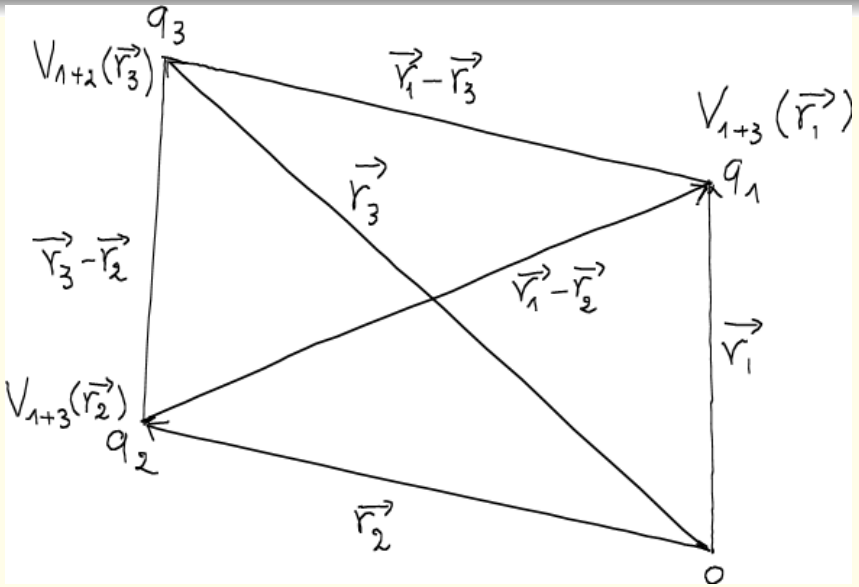


Figure : Répartition spatiale de trois charges discrètes en vue de calculer l'énergie électrostatique des charges

Ce qui donne

$$E_P^{q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1\, q_2}{r_{12}}$$

Si, maintenant, on ramène une troisième charge q_3 de l'infini vers un point $\vec{r}_3$, on doit fournir une énergie qui permet de vaincre, en tout point du chemin suivi par la charge q_3, les forces électriques dues aux deux charges q_1 et q_2 placées en $\vec{r}_1$ er $\vec{r}_2$, respectivement.

Cette énergie nécessaire à ce déplacement de q_3 est égale à l'énergie potentielle électrostatique qu'acquiert la charge q_3 en présence des charges q_1 et q_2, à savoir :

$$E_P^{q_3} = q_3\, V_{1+2}(\vec{r}_3)$$

où $V_{1+2}(\vec{r}_3)$ est le potentiel électrostatique créé par les deux charges q_1 et q_2 placées en $\vec{r}_1$ er $\vec{r}_2$, respectivement, avec

$$V_{1+2}(\vec{r}_3) = V_1(\vec{r}_3) + V_2(\vec{r}_3)$$

ou encore

$$V_{1+2}(\vec{r}_3) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{23}}$$

avec $r_{13} = |\vec{r}_3 - \vec{r}_1|$ la distance entre les charges q_1 et q_3 et $r_{23} = |\vec{r}_3 - \vec{r}_2|$ la distance entre les charges q_2 et q_3.

Ce qui donne

$$E_P^{q_3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1\,q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2\,q_3}{r_{23}}$$

Enfin, la somme des énergies que les trois charges ont acquises dans leurs positions actuelles est égale à :

$$E_P = E_P^{q_1} + E_P^{q_2} + E_P^{q_3} = 0 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1\,q_2}{r_{12}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1\,q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2\,q_3}{r_{23}}$$

En effet,

$$E_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1\,q_2}{r_{12}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1\,q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2\,q_3}{r_{23}}$$

est l'énergie potentielle électrostatique emmagasinée dans le système des trois charges q_1, q_2 et q_3, tant que celles-ci resteront maintenues à leurs positions respectives.

Cas de N charges électriques

En suivant la même procédure, il est possible d'écrire l'expression de l'énergie potentielle électrostatique qu'acquièrent N charges électriques $q_1, q_2, \cdots q_N$ placées sur les positions $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_N$ respectivement, sous la forme suivante :

$$E_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1\,q_2}{r_{12}} + \cdots + \frac{q_1\,q_N}{r_{1N}} + \frac{q_2\,q_3}{r_{23}} + \cdots + \frac{q_2\,q_N}{r_{2N}} + \cdots + \frac{q_{N-1}\,q_N}{r_{N-1N}}\right]$$

Cette expression peut être écrite sous une forme plus condensée :

$$E_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}}$$

ou encore

$$E_P = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}}$$

où r_{ij} est la distance entre les deux charges q_i et q_j.

On a multiplié la somme par $\frac{1}{2}$ pour éviter le double comptage des mêmes termes

$$\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}} \quad \text{et} \quad \frac{q_j\,q_i}{r_{ji}}$$

Réarrangeons l'expression ci-dessus pour qu'elle devienne :

$$E_P = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \sum_{j=1,j\neq i}^{N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{r_{ij}}$$

où

$$V_i \equiv \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}}$$

est l'expression du potentiel électrostatique créé en $\vec{r}_i$ par toutes les charges électriques présentes à l'exception de la charge q_i.

Ce qui permet d'écrire

$$E_P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \, V_i$$

Pour une distribution volumique continue de charges électriques, l'énergie potentielle électrostatique s'écrit comme :

$$E_P = \frac{1}{2} \iiint \rho(\vec{r})\, V(\vec{r}) d\tau$$

où $\rho(\vec{r})$ est la densité volumique des charges électriques et $d\tau$ le volume infinitésimal appartenant au volume contenant les charges.

Dans le cas d'une distribution surfacique (exemple : des charges électriques réparties sur les armatures d'un condensateur) l'énergie potentielle électrostatique de cette distribution est donnée par :

$$E_P = \frac{1}{2} \iiint \sigma(\vec{r})\, V(\vec{r}) dS$$

où $\sigma(\vec{r})$ est la densité surfacique des charges électriques et dS la surface infinitésimale appartenant à la surface contenant les charges.

De ce fait, un condensateur chargé et porté à un potentiel V constant sur l'armature recèle une énergie potentielle électrostatique égale à

$$E_P = \frac{1}{2} V \iiint \sigma(\vec{r}) dS = \frac{1}{2} V Q$$

où Q est la charge électrique totale sur une armature d'un condensateur.

Energie électrostatique en fonction du champ électrique

Considérons l'expression de l'énergie potentielle électrostatique dans le cas d'une charge continue :

$$E_P = \frac{1}{2} \iiint \rho(\vec{r})\, V(\vec{r}) d\tau$$

et en utilisant le fait que, selon la forme locale du théorème de Gauss, la densité volumique des charges est donnée par

$$\rho(\vec{r}) = \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

l'expression de l'énergie électrostatique devient :

$$E_P = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint V(\vec{r})\, \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r})\, d\tau$$

où $V(\vec{r})$ est le potentiel créé par la distribution de charges à l'intérieur du volume considéré.

D'autre part, on a

$$\vec{\nabla}(V\,\vec{E}) = V\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \vec{\nabla} V = V\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - (\vec{E})^2$$

car, dans notre cas, le champ électrostatique dérive d'un potentiel, c'est à dire :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$V\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \vec{\nabla}(V\,\vec{E}) + E^2$$

En remplaçant dans l'expression de l'énergie électrostatique on trouve :

$$E_P = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint\left[\vec{\nabla}(V\,\vec{E}) + E^2\right]\,d\tau$$

En utilisant le théorème de divergence, la première partie de l'intégrale ci-dessus peut s'écrire sous la forme :

$$\iiint\vec{\nabla}(V\,\vec{E})\,d\tau = \oint V\,\vec{E}d\vec{S}$$

où l'intégration se fait sur la surface délimitant le volume contenant la charge électrique.

Plaçons nous maintenant dans le cas où il n'y a pas de charges à l'infini et augmentons les dimensions de la surface d'intégration (fermée).

Vue d'un point sur cette surface infiniment grande, la distribution de charges est assimilable à une charge électrique ponctuelle !

Il en résulte que le potentiel électrostatique V créé par cette charge ponctuelle Q sur la surface varie comme $\frac{1}{r}$, où r est la distance entre le centre de la charge Q et un point sur la surface ; alors que le champ électrostatique $\vec{E}$ varie comme $\frac{1}{r^2}$, d'où le produit $V\vec{E}$ varie comme $\frac{1}{r^3}$.

Remarquons aussi que la surface considérée varie comme r^2, ce qui signifie que l'intégrale

$$\iiint \vec{\nabla}(V\,\vec{E})\,d\tau = \oint V\,\vec{E}\,d\vec{S}$$

varie comme $\frac{1}{r}$, et par conséquent, elle tend vers zéro quand r tend vers l'infini (surface fermée infinie !)

Il nous reste donc l'expression finale de l'énergie potentielle électrostatique qui a la forme :

$$E_P = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint E^2\,d\tau$$

Remarque

On peut penser que cette dernière intégrale doit, elle aussi, tendre vers zéro quand r tend vers l'infini, puisque la quantité E^2 varie comme $\frac{1}{r^4}$ et le volume de la sphère varie comme r^3. Mais, on doit remarquer que cette fois-ci on intègre sur un volume et que pour des régions où r est petit l'intégration à une valeur signifiante, contrairement au cas où l'on intègre juste sur une surface très lointaine de la charge électrique Q.

L'intégrale ci-dessus porte sur tout l'espace. Ainsi, tout se passe comme si l'énergie électrostatique d'une distribution continue de charges électriques était répartie dans tout l'espace avec une densité volumique d'énergie égale à :

$$\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$$

Equation de Poisson

Partant des deux relations locales suivantes :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{et} \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Une troisième relation locale se déduit :

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Sachant que

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V) = \Delta V$$

on trouve l'expression dite : équation de Poisson

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

L'équation de Poisson a le mérite de relier les deux quantités scalaires V (potentiel électrostatique) et ρ (densité de charges électriques) sans passer par la quantité vectorielle du champ électrostatique $\vec{E}(\vec{r})$.

Si aucune charge électrique n'existe dans le milieu considéré, c'est à dire que $\rho = 0$, l'équation de Poisson devient

$$\Delta V = 0$$

connue sous le nom d'équation de Laplace.

Tube de force

C'est un volume imaginaire de forme plus ou moins cylindrique limité par des lignes de champ électrostatique et de base une surface dS.

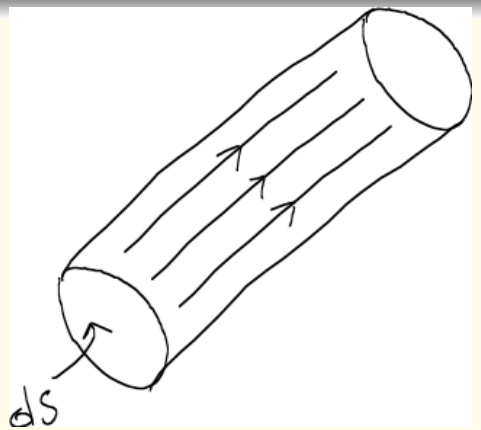


Figure : Tube de force de base dS avec lignes de champ électrostatique sur la surface du tube

Ce concept de tube de force est utile lorsqu'on sait que le flux du champ électrostatique à travers la surface latérale du tube est nul.

Cela est dû au fait que les vecteurs représentant le champ électrostatique sont toujours colinéaires aux lignes de champs qui, elles, sont contenues dans la surface délimitant le tube.

Cette propriété peut nous servir à simplifier les calculs relatifs à l'application du théorème de Gauss.

Équipotentielles

Une équipotentielle est une surface sur laquelle le potentiel électrostatique est constant.

C'est ainsi que les équipotentielles dans le cas d'un charge ponctuelle q sont des surfaces sphériques concentriques dont le centre est la position de la charge q.

Remarquons que les lignes de champ électrostatique $\vec{E}$ créé par cette charge q sont perpendiculaires en tout point aux surfaces équipotentielles. Ceci est vrai pour n'importe quelle situation physique faisant intervenir une distribution de charges immobiles.

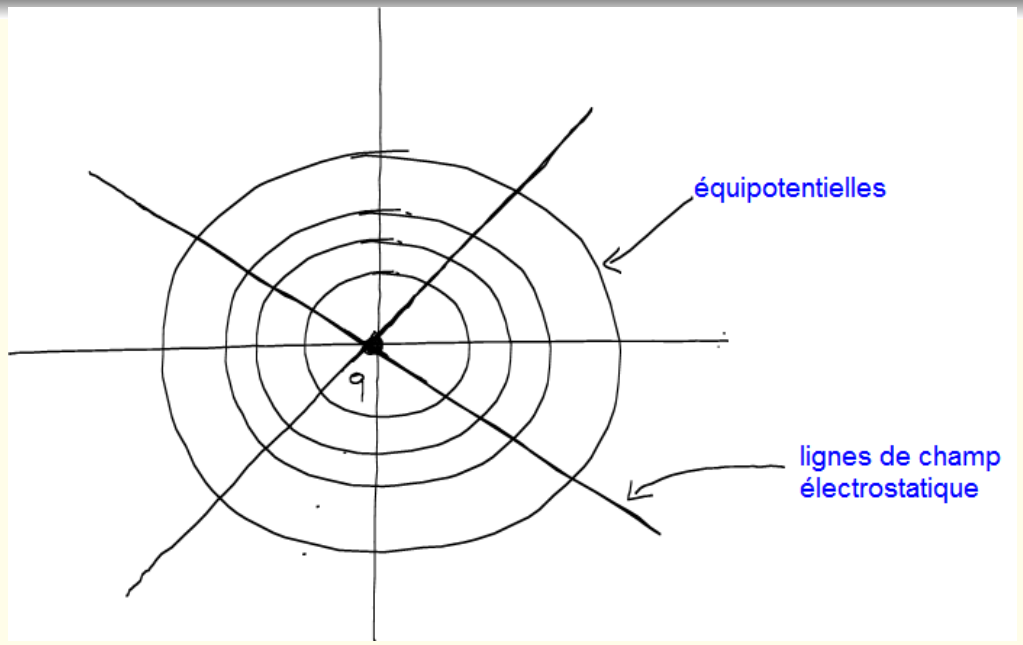


Figure : Équipotentielles et lignes de champ électrostatique d'une charge ponctuelle q au centre

En effet, en se déplaçant sur une surface équipotentielle la variation du potentiel électrostatique est nul :

$$dV = 0$$

mais on sait que

$$dV = \vec{\nabla} V \cdot d\vec{\ell}$$

qui est égal dans le cas d'un potentiel électrostatique à

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Ceci est l'équation mathématique d'une équipotentielle

$$\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

où $d\vec{\ell}$ est un élément infinitésimal de déplacement sur l'équipotentielle.

Alors que, rappelons-le, l'équation d'une ligne de champ électrostatique est :

$$\vec{E} \wedge d\vec{\ell} = 0$$

où $d\vec{\ell}$ est un élément infinitésimal de déplacement sur une ligne de champ. Cela signifie que les lignes du champ électrostatique sont toujours perpendiculaire à une surface équipotentielle en tout point de la surface.