Électrostatique: conducteurs en équilibre

Mohamed Mebrouki

EPST Tlemcen

1 Mars 2016

Expérience 1 :

Si on met en contact deux matériaux conducteurs électriquement chargés (deux baguettes frottées), les charges électriques passeront d'un matériau vers un autre, modifiant ainsi le nombre de charges contenues dans chacun des matériaux jusqu'à ce qu'un équilibre électrostatique soit atteint : les charges électriques y sont statiques (immobiles).

Cela veut dire que la résultante des forces mécaniques appliquées sur chacune des charges électriques dans le matériau par les autres charges est nulle.

Le champ électrostatique créé par toutes les charges électriques au sein du conducteur est nul en tout point du matériau ! Autrement les charges se déplaceront sous l'effet d'un champ électrostatique non nul.

Comme le champ électrostatique dérive dans ce cas d'un potentiel électrostatique, ce dernier doit être constant en tout point du matériau conducteur.

Un matériau conducteur en équilibre électrostatique est équipotentiel.

Cela se passe comme si des charges électriques prennent des positions dans le conducteur de telle sorte que le champ électrostatique qu'elles créent compense exactement, en tout point du conducteur, le champ électrostatique créé par d'autres charges sur le même conducteur.

Analogie avec la thermodynamique

On peut trouver une analogie avec l'effet thermodynamique où deux corps de températures initialement différentes sont mis en contact. Les corps vont acquérir au cours du temps la même température finale en échangeant de la chaleur (du plus chaud au plus froid)

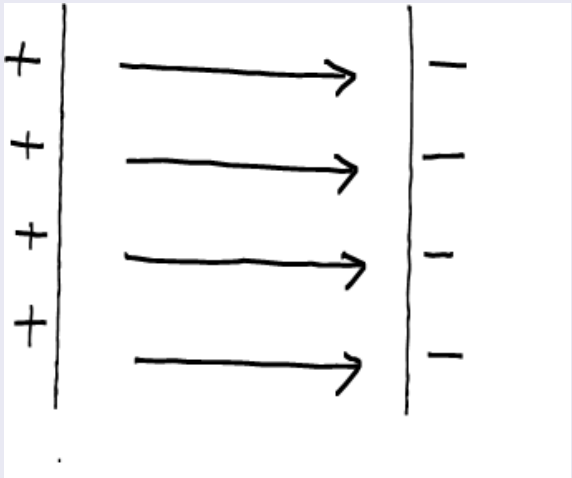
Équilibre électrostatique $\Leftrightarrow$ Équilibre thermique

Potentiel électrostatique $\Leftrightarrow$ Température

Charges électriques $\Leftrightarrow$ Chaleur

Expérience 2 :

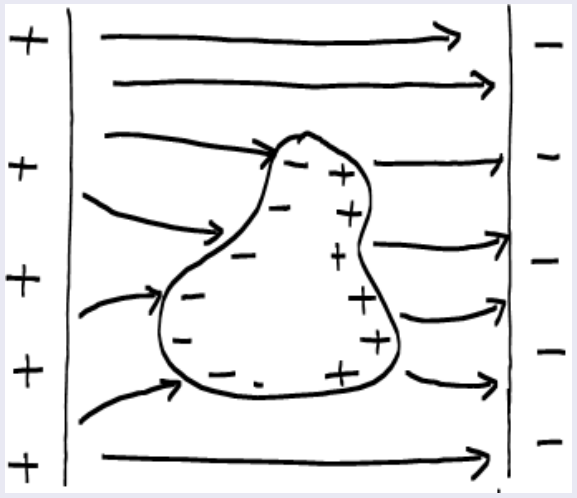
Prenons deux armatures (plan conducteur) supposées infinies, l'une chargée positivement et l'autre chargée négativement (par un mécanisme connu). Dans ce cas, les lignes de champ sont des droites allant de l'armature positive vers l'armature négative.



Si maintenant on insère un conducteur entre les deux armatures, les charges électriques sur le conducteur négatives vont subir des forces électriques dues au champ électrostatique extérieur $\vec{E}_{\text{ext}}$ régnant entre les deux armatures,

$$\vec{F} = q\vec{E}_{\text{ext}} = -e\vec{E}_{\text{ext}}$$

ce qui entraine leur déplacement vers la surface du conducteur en face de l'armature chargée positivement.



En se déplaçant dans le conducteur sous l'effet du champ électrostatique créé par les armatures, les charges électriques du conducteur vont laisser derrière elles des charges positives sur la surface du conducteur en face de l'armature chargée négativement

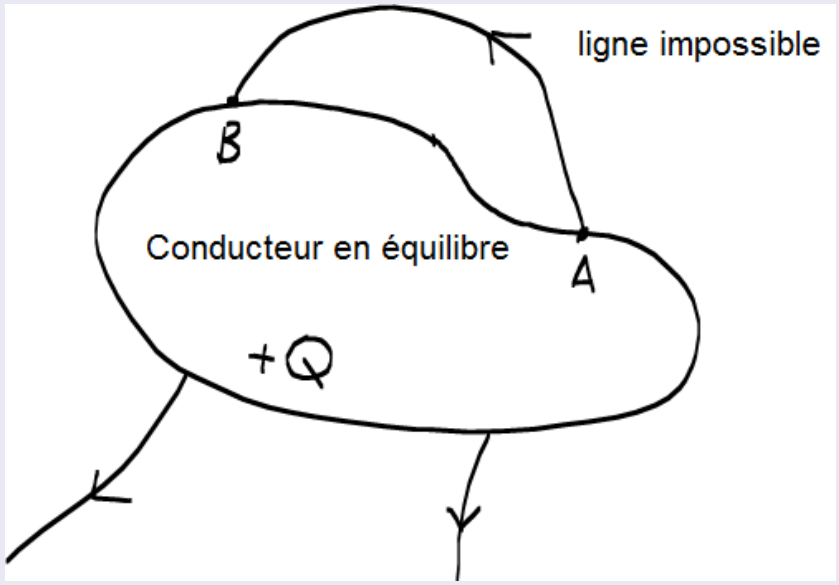
Cette redistribution des charges électriques négatives et positives sur le conducteur va créer un champ électrostatique interne (dans le conducteur) $\vec{E}_{\text{int}}$ qui, une fois l'équilibre électrostatique atteint, annulera exactement le champ électrostatique créé initialement par les armatures dans le conducteur, telle que :

$$\vec{E}_{\text{ext}} + \vec{E}_{\text{int}} = \vec{0}$$

Le champ électrostatique à l'intérieur du conducteur étant nul (pas de lignes de champ passant à travers le conducteur), les lignes de champ partant de l'armature positive vont "atterrir" sur la face chargée négativement du conducteur, alors que des lignes de champ partiront de la surface positive du conducteur et atterrissent sur l'armature chargée négativement. Cela change complètement la configuration des lignes de champ entre les deux armatures chargées.

En effet, la circulation du champ électrostatique le long d'une ligne reliant deux points A et B sur la surface du conducteur est donnée :

$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$



Mais on sait que $V(A)$ et $V(B$ ont la même valeur puisque le conducteur en équilibre est équipotentiel (le même potentiel en tout point du conducteur), ce qui donne

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

d'autre part

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

ne devrait pas être nul car les points A et B ne sont pas confondus, ce qui est une contradiction.

Cette ligne de champ est par conséquent impossible.

Pourquoi les charges électriques se répartissent sur la surface d'un conducteur ?

La fait que les charges électriques ramenées à un conducteur (par électrisation) se répartissent sur la surface de celui-ci (avant d'atteindre l'équilibre) plutôt qu'en son sein est un peu étrange !

Car on peut penser que les charges électriques de même polarité de par leur répulsion doivent occuper tout l'espace qui leur est offert dans tout le conducteur.

Mais la réalité est que les charges se répartissent sur la surface du conducteur à la recherche d'une configuration spatiale qui minimise leur énergie potentielle électrostatique donnée par :

$$E_P = \iiint \rho(\vec{r})V(\vec{r})dv$$

En effet, il facile de vérifier que l'énergie potentielle électrostatique d'un ensemble de charges électriques de quantité de charge totale Q réparties uniformément sur une surface sphérique de rayon R est égale à :

$$E_P^S = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R},$$

alors qu'elle est égale à

$$E_P^V = \frac{3}{20\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R},$$

si la même charge électrique était répartie uniformément dans le volume de la sphère ($E_P^S < E_P^V$).

Par conséquent, la densité volumique des charges à l'intérieur du conducteur en équilibre est nulle.

Ce qui peut être vérifié à l'aide de la forme locale du théorème de Gauss, à savoir :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

En effet, puisque le champ électrostatique dans un conducteur en équilibre est nul ($\vec{E} = \vec{0}$), il s'ensuit que la densité volumique des charges $\rho(\vec{r})$ devrait être nulle en tout point où $\vec{E} = \vec{0}$.

Remarque importante

Ce résultat ne signifie pas que le conducteur en équilibre ne contient pas de charges (négatives ou positives) ; autrement on n'aura même pas de la matière ! En fait, cela signifie tout simplement que le nombre de charges positives est égal en tout point du conducteur (en vérité dans un volume infinitésimal centré sur ce point) au nombre de charges négatives.

Tout surplus de charges électriques (obtenu par électrisation ou autre) se dépose sur la surface du conducteur en équilibre.

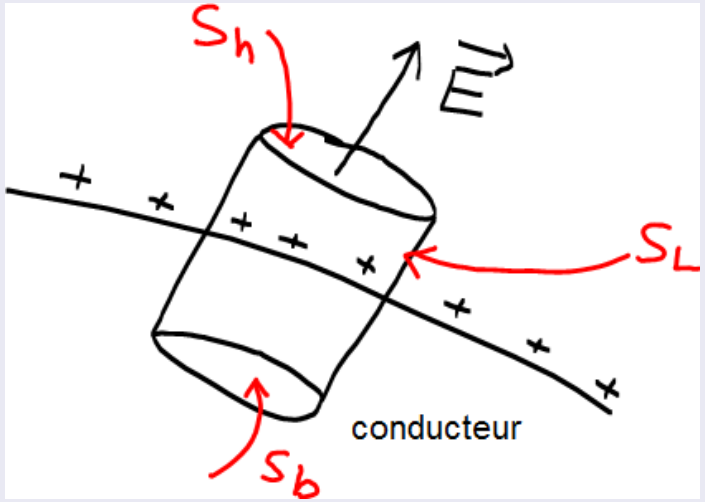
Champ électrostatique sur la surface d'un conducteur en équilibre

Le champ électrostatique à la surface d'un conducteur en équilibre est toujours normal à cette surface.

En fait, si le champ électrostatique avait une composante tangentielle à la surface du conducteur, des charges électriques sur la même surface subiront l'effet d'une force électrique entrainant ainsi leur déplacement ; ce qui est contradictoire avec la notion d'équilibre électrostatique d'un conducteur où les charges électriques sont statiques.

Intensité du champ électrostatique à l'aide du théorème de Gauss

On choisit comme surface de Gauss un cylindre infiniment petit dont la surface de bas est à l'intérieur du conducteur alors que la celle d'en haut est à l'extérieur du conducteur et est perpendiculaire à la surface du conducteur.



Selon le théorème de Gauss, le flux du champ électrostatique créé par les charges sur la surface fermée est égal à

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

avec

$$\Delta Q_{\text{int}} = \sigma \Delta S$$

est la charge électrique déposée sur la surface du conducteur délimitée par le cylindre.

La contribution de la surface de base S_1 du cylindre à l'intérieur du conducteur au flux de $\vec{E}$ est nulle car celui-ci est nul à l'intérieur du conducteur.

Le flux à travers la partie intérieure (dans le conducteur) de la surface latérale S_L du cylindre est nul car le champ électrostatique $\vec{E}$ y est nul, mais le flux à travers la partie extérieure de S_L est aussi nul car le champ $\vec{E}$ est normal au vecteur de cette même surface.

Finalement, le flux à travers la surface en haut du cylindre S_2 (supposée infiniment petite tel que le champ y est constant) est égal à :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{E} d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{E} dS \vec{n} = E_n \Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0}$$

où $\vec{n}$ est le vecteur unité normal en tout point de la surface du conducteur.

Ce qui donne

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

où E_n est la composante normale du champ électrostatique.

Ou encore

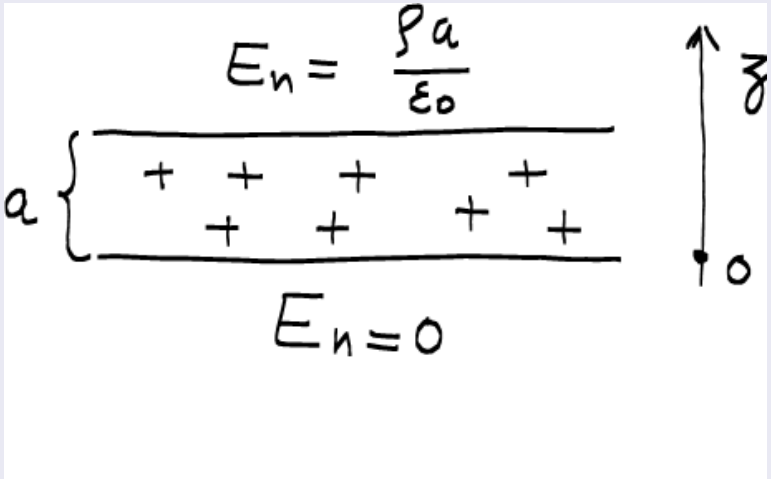
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$$

Remarque

Le champ électrostatique $\vec{E}$ est constant en tout point à l'extérieur du conducteur alors qu'il est nul juste à l'intérieur du conducteur (discontinuité du champ). Ce résultat n'est pas totalement vrai, car dans des régions très éloignés de la surface le champ électrostatique doit s'annuler ! On se rappelle bien le résultat obtenu pour un plan infini, à savoir :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}$$

Pour mieux comprendre la situation, on va supposer que la surface sur laquelle est répartie la charge électrique ΔQ a comme même une certaine épaisseur a.



Supposons que les charges y sont distribuées uniformément avec une densité de charges volumique ρ. D'après le théorème de Gauss, on a

$$E_n \Delta S = \frac{\rho a \, \Delta S}{\varepsilon_0}$$

ce qui donne la valeur juste au delà de la surface du conducteur :

$$E_n = \frac{\rho a}{\varepsilon_0}$$

On a donc la situation suivante :

1. A l'intérieur du conducteur (dans le corps) le champ électrostatique $\vec{E}$ est nul.
2. A l'extérieur du conducteur (les bords du conducteur ne sont pas inclus) le champ électrostatique est égal à $E_n = \dfrac{\rho a}{\varepsilon_0}$

On a donc

$$E_n(a) - E_n(0) = \frac{\rho a}{\varepsilon_0} - 0 = \frac{\rho a}{\varepsilon_0}$$

ou encore

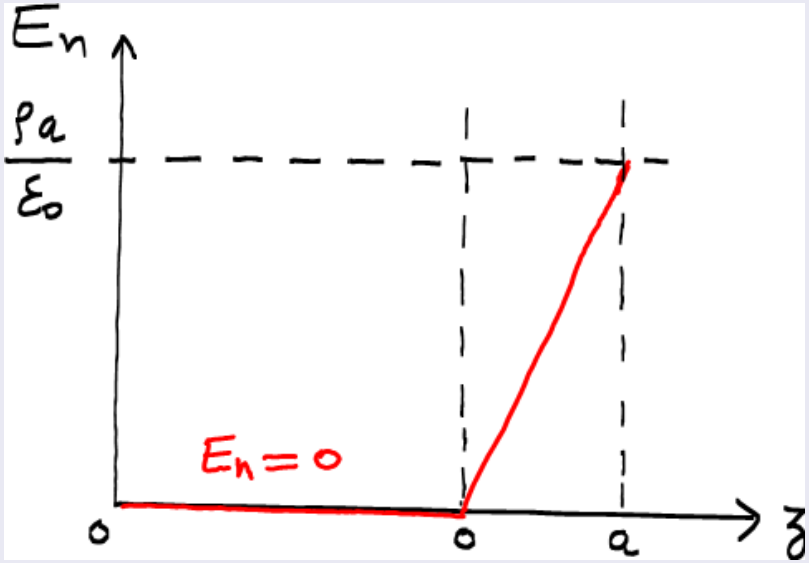
$$\frac{E_n(a) - E_n(0)}{a} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Et si on fait tendre a vers zéro, on aura :

$$\lim_{a \to 0} \frac{E_n(a) - E_n(0)}{a} = \frac{dE_n(z)}{dz} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Donc, la variation du champ électrostatique entre les deux limites de la "surface" (région chargée) est continue et est égale à : $\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

Dans le cas où ρ est constante on obtient une variation en ligne droite de la composante normale du champ électrostatique $\vec{E}$ le long de l'épaisseur de la surface chargée du conducteur.



Remarque

On doit remarquer que

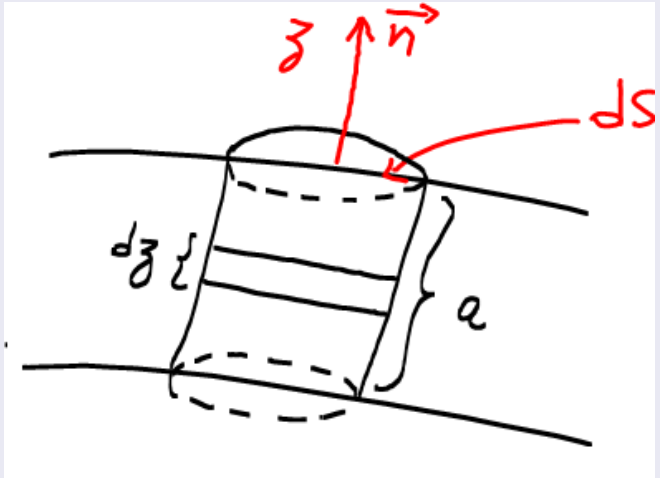
$$\rho a \to \sigma \qquad \text{si} \qquad a \to 0$$

où σ est la densité surfacique des charges électriques sur la surface du conducteur.

Pression électrostatique

Reprenons la situation précédente d'un cylindre imaginaire et pris dans la surface "épaisse" sur laquelle est répartie une charge électrique de surface de base dS et de hauteur a (selon l'axe des z).

Un élément chargé du cylindre de volume $dV = dSdz$ est soumis à un champ électrostatique normale E_n dû à toute les charges électriques réparties sur la totalité de la surface " épaisse" du conducteur en équilibre.



On considère le volume de charges dV comme un bloc "rigide" : les forces électriques entre les charges à l'intérieur de ce volume dV s'annulent mutuellement selon la loi d'action et de réaction de Newton, comme si toute la charge électrique $dq = \rho dV$ dans ce volume infinitésimal, est soumise à une force électrique :

$$d\vec{F} = dq\vec{E}$$

où $\vec{E}$ est le champ électrostatique créé par toutes les autres charges électriques réparties sur la surface du conducteur (à l'exception des charges dans le volume dV qui ne peuvent pas appliquer une force sur elles mêmes !)

$$d^2\vec{F} = \rho dz dS\, E_n(z)\vec{n}$$

Mais on sait que

$$\rho(z) = \varepsilon_0 \frac{dE_n(z)}{dz}$$

ce qui, en remplaçant dans l'expression précédente, donne

$$d^2\vec{F} = \varepsilon_0 \frac{dE_n(z)}{dz} dz\, dS\, E_n(z)\vec{n} = \varepsilon_0 E_n\, dE_n\, dS\, \vec{n}$$

Intégrons l'expression par rapport à E_n de 0 à $\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$:

$$d\vec{F} = \varepsilon_0 dS \left(\int_0^{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}} E_n \, dE_n \right) \vec{n}$$

ce qui donne

$$d\vec{F} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \right)^2 dS\vec{n}$$

On définit donc une pression électrostatique agissant sur l'élément du cylindre chargé de la part des autres charges électriques réparties sur la surface du conducteur comme :

$$P = \frac{d\vec{F}}{dS\vec{n}} = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0}$$

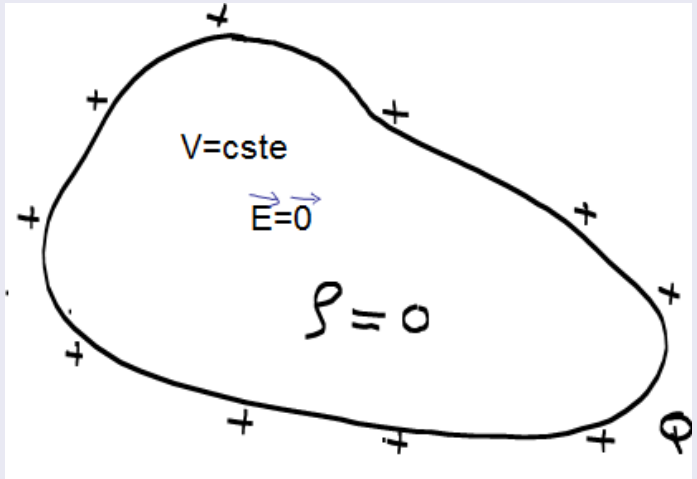
Cette pression tend à pousser le corps du conducteur vers l'extérieur car la force $d\vec{F}$ est bien suivant $\vec{n}$

Exemple de pression électrostatique

Un exemple de la vie courante qui permet de constater ce phénomène de pression électrostatique est le cas de bulles de savon en l'air. En effet, si on lâche des bulles au savon en l'air, celles-ci se gonflent. Cela est due au fait que des charges électriques dans l'air viennent se déposer sur la surface de la bulle, ce qui entraine une pression électrostatique permettant à la bulle de se gonfler de plus en plus.

Capacité électrique d'un conducteur

Le potentiel électrostatique à l'intérieur d'un conducteur électriquement chargé de forme quelconque est constant.



Remarque

(Il est important de se rappeler que les charges électriques sur la surface du conducteur n'appartiennent pas au conducteur mais elles y sont déposées par électrisation ou par un autre mécanisme !)

Il est donc logique de penser que la charge Q et le potentiel électrostatique V sur le conducteur sont deux quantités physiques liées : si on augmente la charge Q le potentiel sur la surface du conducteur (et à l'intérieur) augmente.

C'est le cas d'une sphère conductrice de rayon R sur laquelle est déposée une charge Q, donnant naissance un potentiel électrostatique égal à :

$$V(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$

Et on voit bel et bien une relation entre Q et V !

On introduit donc le concept de la capacité électrique d'un conducteur à accueillir des charges électriques et les répartir sur sa surface ; définie comme :

$$C \equiv \frac{Q}{V} \qquad \text{mesurée en Farad (F)}$$

Remarque

Le Farad étant une valeur très grande, on utilise plutôt des sous-unités tels que : micro Farad (μF) ou encore nano Farad (nF).

Analogie thermique

Pour une quantité de chaleur donnée, la température d'un corps dépend de sa capacité calorifique.

La capacité électrique d'une sphère de rayon R est égale à :

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

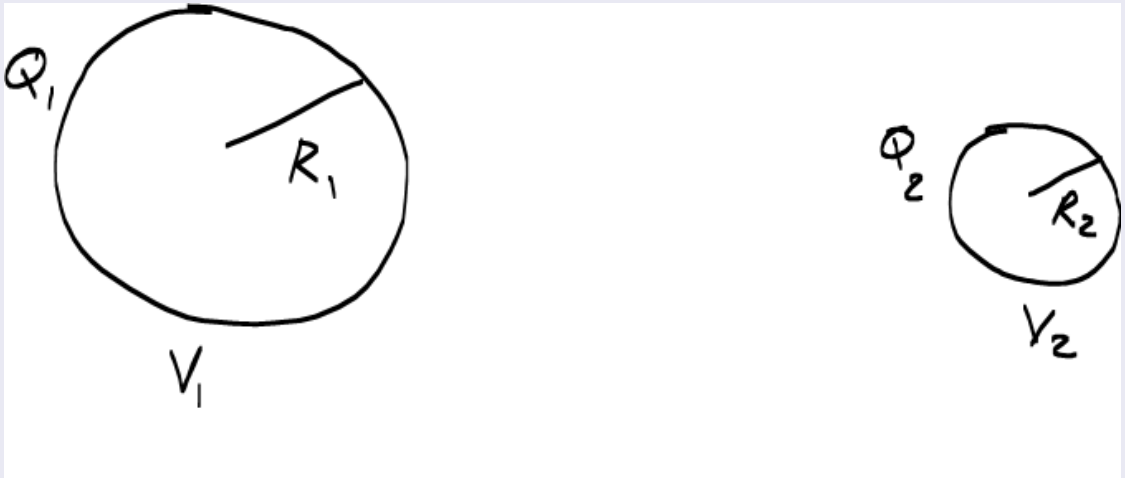
Plus le rayon de la sphère conductrice est grand plus sa capacité à recevoir des charges et les répartir sur sa surface est grande.

Remarque

La capacité électrique d'un conducteur dépend de sa géométrie et de sa permittivité électrique.

Effet de pointes

Considérons deux conducteurs de forme sphérique de surfaces $4\pi R_1^2$ et $4\pi R_2^2$, sur lesquelles sont déposées des charges électriques Q_1 et Q_2, respectivement.



État initial

A l'état initial, les deux sphères sont supposées éloignées l'une de l'autre (pas d'influence mutuelle entre les charges sur les deux sphères !) et les charges électriques y sont réparties uniformément. Le potentiel électrostatique sur la sphère de rayon R_1 et de densité surfacique de charges σ_1 est donné par :

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_1} = \frac{4\pi R_1^2\sigma_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0}$$

Le potentiel électrostatique sur la sphère de rayon R_2 et de densité surfacique de charges σ_2 est donné par :

$$V_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_2} = \frac{4\pi R_2^2\sigma_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{\sigma_1 R_2}{\varepsilon_0}$$

État final

On relie les deux sphères par un fil conducteur (on néglige les effets électrostatiques sur le fil) : les deux sphères auront le même potentiel à l'équilibre

$$V_1 = V_2 \Longrightarrow \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1 R_2}{\varepsilon_0}$$

Analogie thermique

Deux corps portés à des températures différentes auront la même température à l'équilibre après avoir été mis en contact.

Au contact les deux sphères s'arrangent pour que le potentiel en tout point sur le nouveau conducteur (2 sphères +fil) soit le même. Cela implique une nouvelle répartition des charges électriques sur les surfaces des deux sphères, à savoir :

$$\sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2$$

ou encore

$$\sigma_1 = \sigma_2 \frac{R_2}{R_1}$$

La distribution surfacique sur la première sphère σ_1 dépend de σ_2 mais aussi du rapport de rayons des deux sphères et plus particulièrement du rayon de la surface sur laquelle est déposée la charge σ_1.

Dans le cas d'un conducteur (1) a une surface non sphérique (quelconque), la densité surfacique des charges électriques (qui était constante), dépendra plus exactement de la courbure de la partie considérée sur le conducteur.

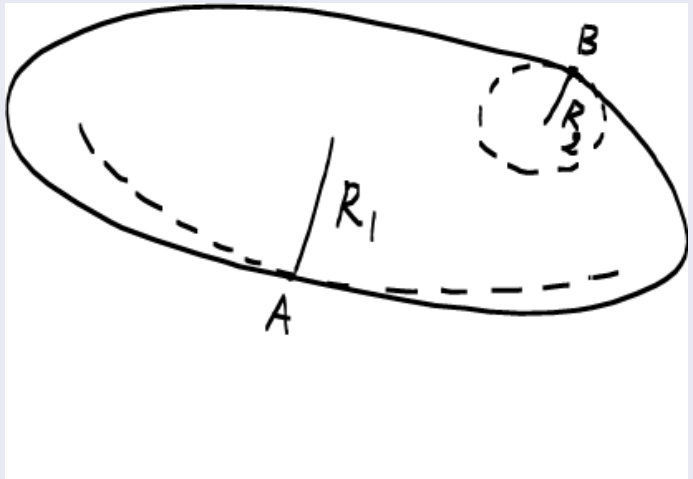
En effet,

$$\sigma_1 = \sigma_2 \frac{R_2}{R_1}$$

doit être très grande au point B car le rayon de courbure de la surface en ce point est très petit (région pointue) ; par contre σ_1 est petite au point A car la rayon de courbure de la surface en ce point est grand.

C'est quoi un rayon de courbure ?

Il est possible de considérer tout point sur une courbe quelconque comme appartenant à un cercle de rayon R (qu'on doit calculer !)



La densité surfacique de charges varie donc d'une région à une autre sur la surface (quelconque) du conducteur, selon que cette région est pointue ou moins pointue !

Ainsi, la densité de charge est d'autant plus grande que la région est pointue. C'est ce qu'on appelle l'effet de pointe.

Un conséquence importante de cette nouvelle répartition des charges sur la surface du conducteur est que le champ électrostatique créé dans l'espace par ces mêmes charges

$$E_n = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \qquad \text{toujours normal à la surface !}$$

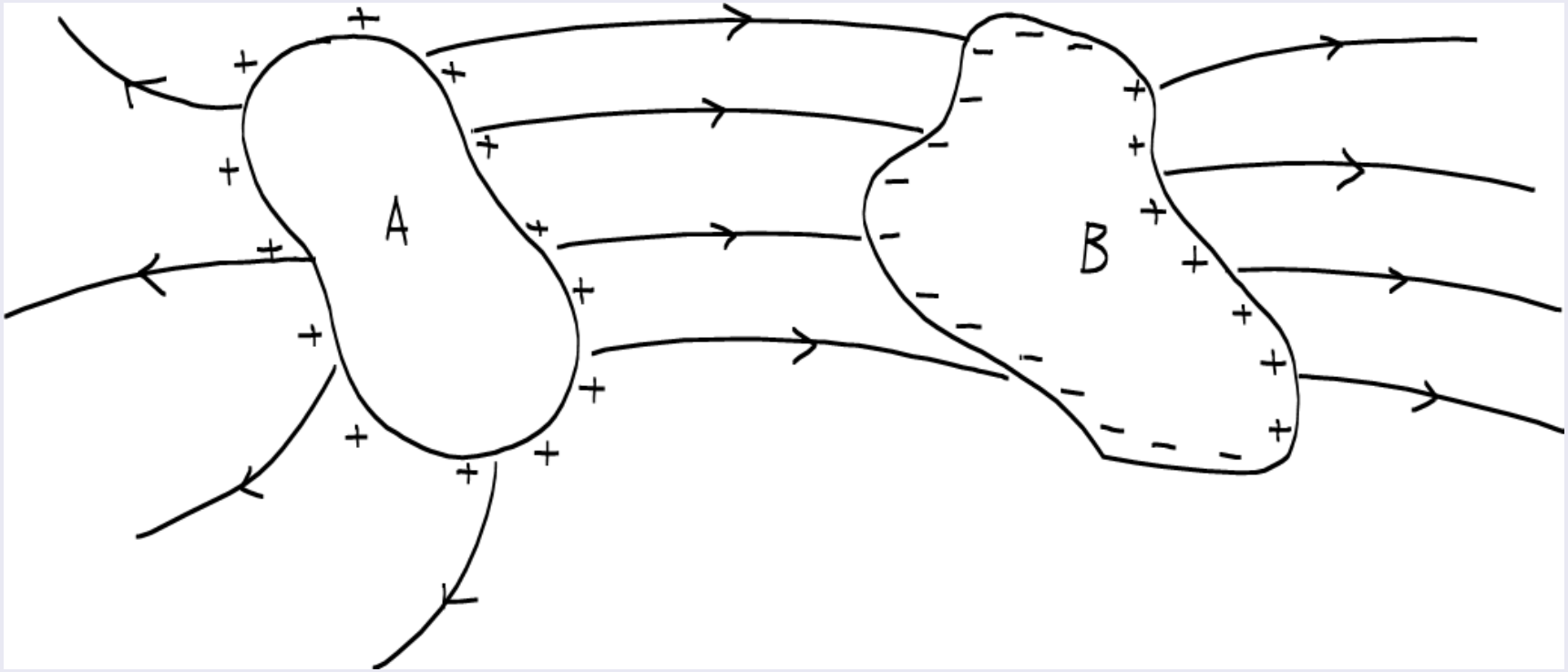
est très élevé au voisinage des régions pointues de la surface et est faible au voisinage des régions de faible courbure.

Application

Ce résultat explique bien l'utilité les tiges pointues, appelées paratonnerre, pour attirer les charges électriques.

Phénomènes d'influence entre conducteurs

Considérons un conducteur A chargé positivement et porté donc à un potentiel V_A : des lignes de champ électrostatique émanent de la surface du conducteur. En approchant un conducteur B neutre (ne portant pas de charges électriques libres sur sa surface donc pas de lignes de champ émanant) du conducteur A, des charges négatives sur B seront attirées par les charges positives de A et s'accumuleront sur la surface faisant face au conducteur A. Alors que des charges positives vont apparaitre sur l'autre face de B (comme signe de manque de charges négatives).


A
B

La situation actuelle est la suivante :

1. Des lignes de champ émanant de A vont atterrir sur la partie de la surface de B faisant face à A (car chargée négativement).
2. Des lignes de champ émaneront de B, et plus exactement de la région de la surface de B chargée positivement, vers d'autres lieux (pas A)

Cette nouvelle répartition des charges électriques sur B est due à ce qu'on appelle le phénomène d'influence mutuelle entre les deux conducteurs.

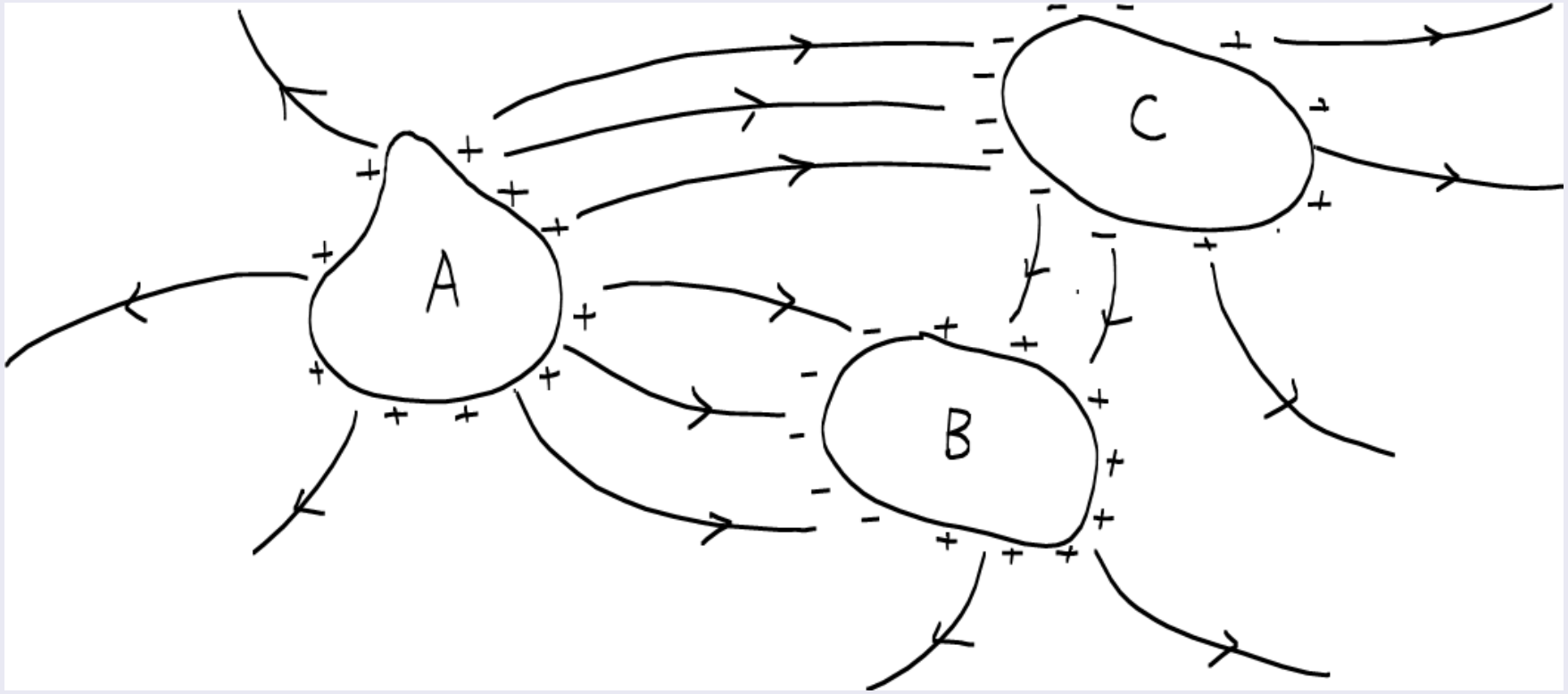
Le terme "mutuelle" indique que l'influence est dans les deux sens : le conducteur A influe à travers sa charge le conducteur B en entrainant une nouvelle répartition des charges propres de B, ce qui, en retour, va influencer la répartition des charges sur A (charges propres à A et charges reçues par électrisation !)

Suite à cette nouvelle répartition des charges électriques sur le conducteur B, celui-ci va acquérir un potentiel électrostatique V_B, constant en tout point de B.

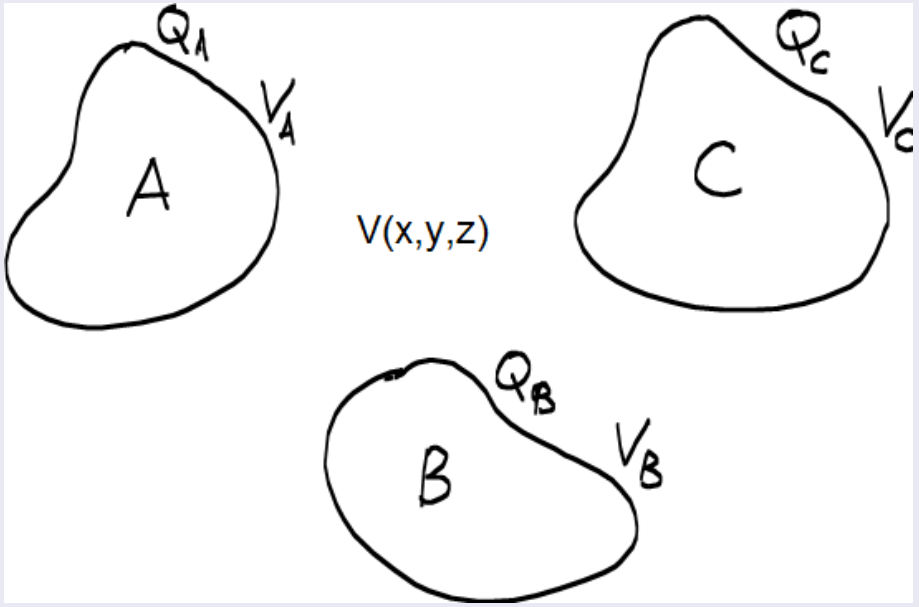
Cette nouvelle situation aux conducteurs A et B prendra un temps fini pour se réaliser : on dit que les deux conducteurs passeront par un régime transitoire avant de voir s'établir un état d'équilibre entre eux.

Si on rapproche un troisième conducteur C initialement neutre (isolé) des deux conducteurs A et B à l'état final décrit précédemment, des charges négatives vont apparaitre sur le côté de C faisant face à A (mais aussi celle faisant face à la surface positivement chargée du conducteur B).

Par conséquent, des charges positives apparaissent sur le conducteur C en signe de manque de charges électriques dans la région désertée par les charges électriques négatives.



L'état actuel des charges induites sur la surface du conducteur C va lui aussi influencer la répartition des charges électriques sur les deux autres conducteurs A et C. Des lignes de champ électriques émanant de A et B atterrissent sur C, mais aussi des lignes de champ émanent du conducteur C vers des régions qui n'incluent pas forcément les conducteurs A et B !



Après un passage par un régime transitoire, le système des trois conducteurs A, B et C atteint l'état d'équilibre :

1. Le conducteur A porte une charge électrique Q_A (non nulle car ce sont des charges libres n'appartenant pas au conducteur A) qui lui donne un potentiel V_A en son sein.
2. Le conducteur B porte une charge électrique Q_B (de valeur algébrique nulle car le conducteur B n'a reçu aucune charge électrique de l'extérieur : charge induite) qui lui donne un potentiel V_B en son sein.
3. Le conducteur C porte une charge électrique Q_C (de valeur algébrique nulle car le conducteur C n'a reçu aucune charge électrique de l'extérieur : charge induite) qui lui donne un potentiel V_C en son sein.

Cet ensemble des conducteurs (A chargé, B et C neutres) va générer dans l'espace un potentiel électrostatique $V(x, y, z)$ vérifiant les conditions d'équilibre sur chaque conducteur :

1. $V(x, y, z)$ prend la valeur V_A aux points de coordonnées x, y et z appartenant au volume occupé par le conducteur A.
2. $V(x, y, z)$ prend la valeur V_B aux points appartenant au volume occupé par le conducteur B.
3. $V(x, y, z)$ prend la valeur V_C aux points appartenant au volume occupé par le conducteur C.

Le potentiel $V(x, y, z)$ admet donc une solution unique dans la région entre les conducteurs.

Cette solution est obtenue à travers la résolution de l'équation de Poisson :

$$\Delta V(x, y, z) = -\frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon_0}$$

Remarquons que les charges électrostatiques (libres) sont réparties sur le conducteur A : pas de charges électriques dans la région entre les conducteurs, d'où :

$$\rho(x, y, z) = 0$$

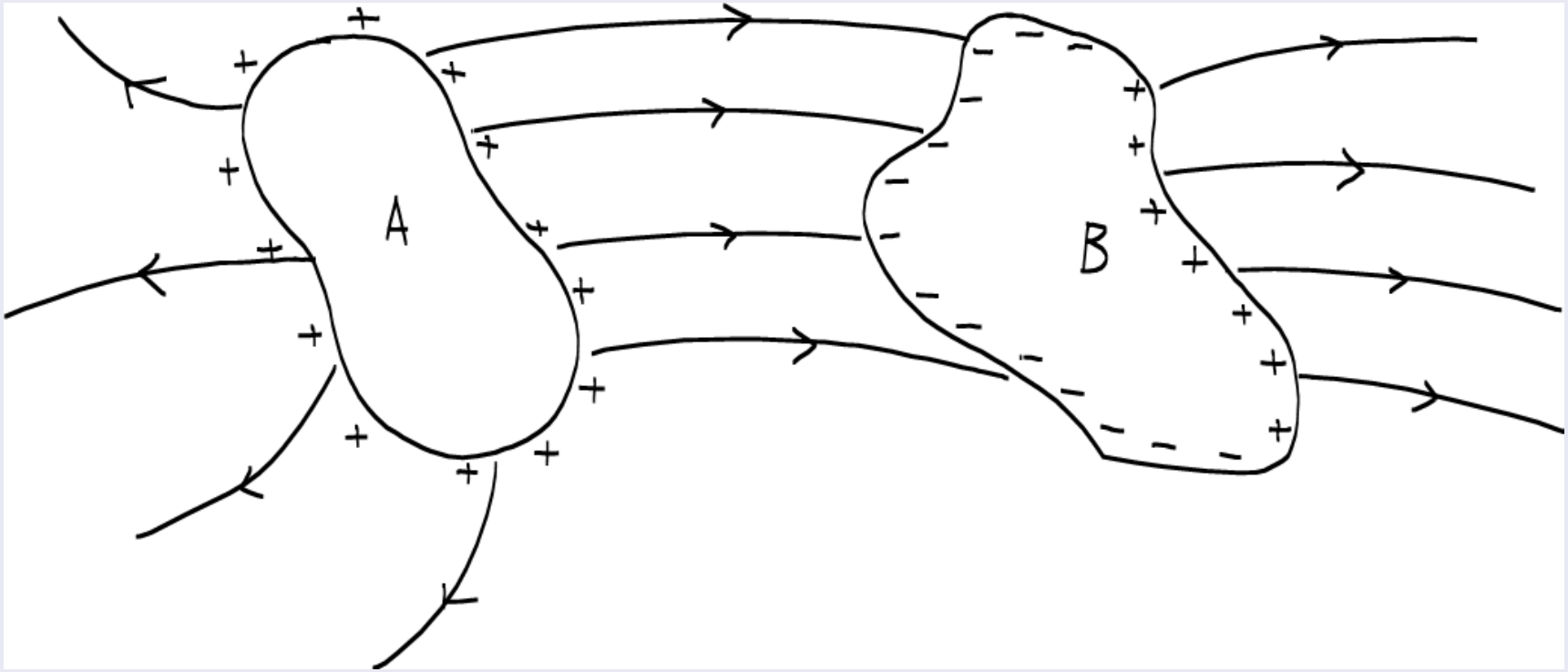
Ce qui nous amène à écrire :

$$\Delta V(x, y, z) = 0 \qquad \text{équation de Laplace}$$

On peut rajouter une autre condition aux limites qui consiste à dire que le potentiel électrostatique $V(x, y, z)$ à l'infini (là ou il n'y a pas de charges électriques) doit être nul !

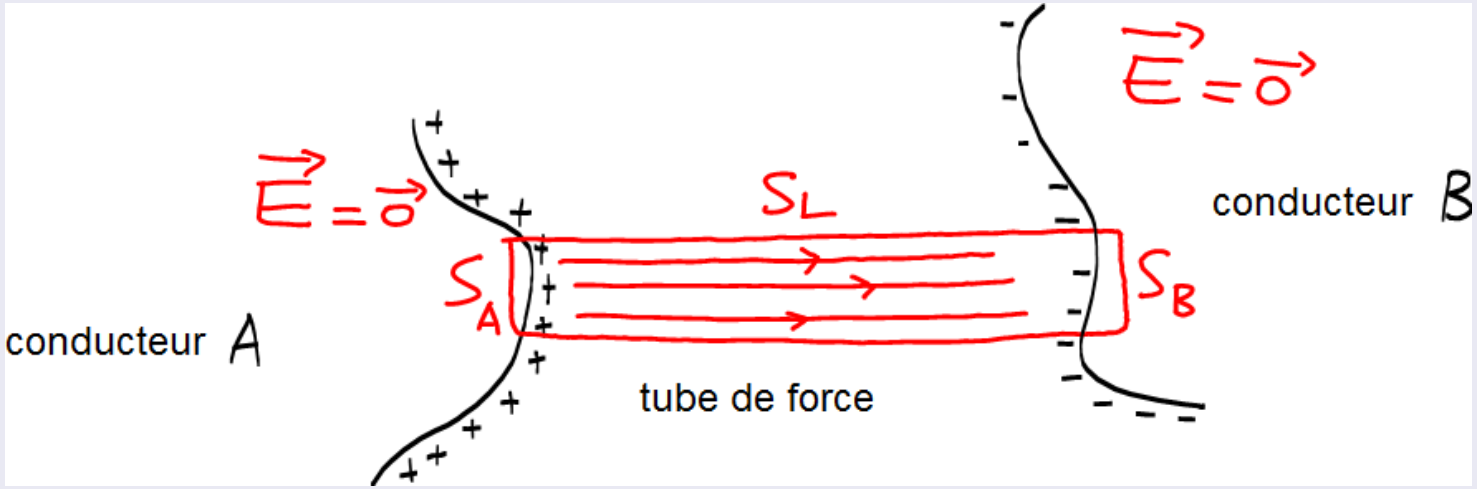
Théorème des éléments correspondants

Reprenons l'exemple du conducteur A portant sur sa surface une charge électrique libre Q_A et un conducteur B initialement isolé (sans charge sur sa surface). Les deux conducteurs ne sont pas au même potentiel électrostatique, des lignes de champ électrostatique relient donc A et B.



Prenons deux surfaces très petites et opposées sur les deux conducteurs A et B. De ces surfaces sortent des lignes de champ (de A) et atterrissent sur B, avec un champ électrostatique normal à la surface. Cet ensemble de lignes forme ce qu'on appelle un tube de flux.

Calculons le flux du champ électrostatique à travers la surface fermée du cylindre reliant les conducteurs A et B et dans les surfaces de base S_A et S_B sont au sein des deux conducteurs, respectivement.



Le théorème de Gauss

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

ou encore

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_A} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_B} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Mais on sait

$$\iint_{S_A} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \qquad \text{car } \vec{E} \text{ est nul en A}$$

$$\iint_{S_B} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \qquad \text{car } \vec{E} \text{ est nul en B}$$

Aussi

$$\iint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \qquad \text{car } \vec{E} \text{ est perpendiculaire à } d\vec{S}$$

Ce qui signifie que la charge électrique à l'intérieur de ce cylindre devrait être nulle !

Mais on sait que les charges électriques existent bel et bien sur les deux surfaces opposées du tube. On conclut donc que la quantité de charges positives sur la surface de A faisant partie du cylindre est égale à la quantité de charges négatives sur la surface de B faisant partie du cylindre :

$$Q_{\text{int}} = Q_A + Q_B = 0 \Longrightarrow Q_B = -Q_A$$

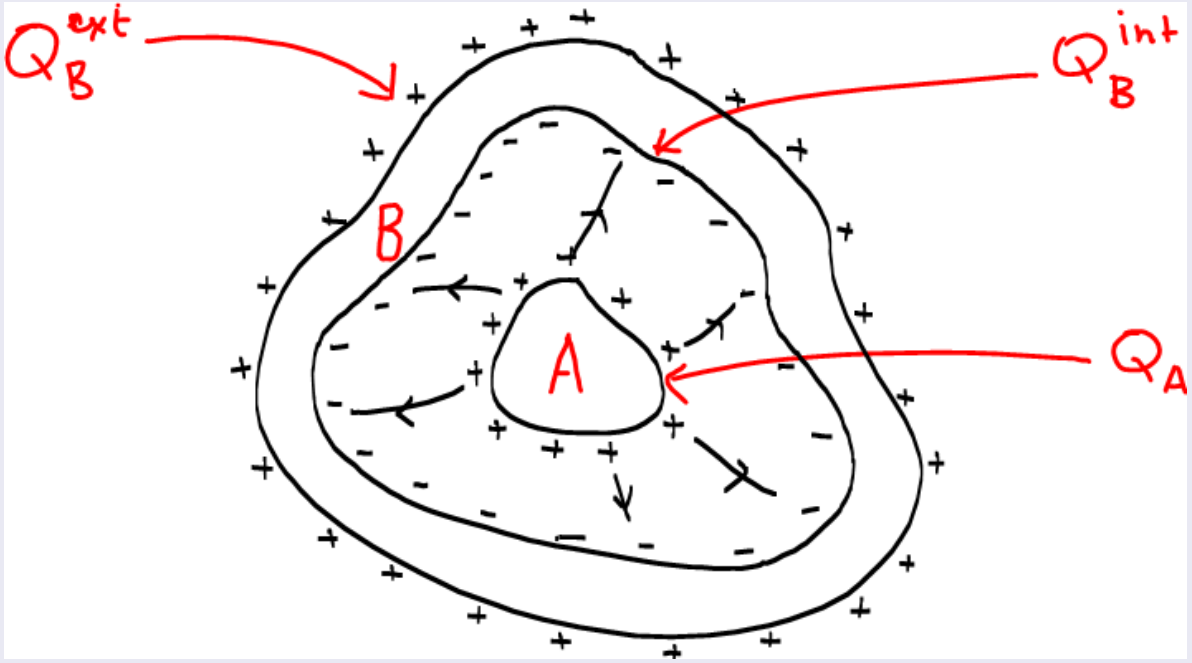
Deux éléments correspondants portent des charges égales et opposées.

Remarque importante

On doit insister sur le fait que les surfaces de base du cylindre choisi sont à l'intérieur des conducteurs, et par conséquent elles ne portent pas de charges électriques !

Ce type d'influence entre conducteurs est partiel car les lignes de champ sortant du conducteur A ne tombent pas toutes sur le conducteur B.

On peut créer des conditions d'influence électrostatique totale en plaçant par exemple le conducteur A au sein (à l'intérieur) du conducteur B. Dans ce cas, toutes les lignes de champ électrostatique issues A vont toutes aboutir vers B.



Ce qui signifie, selon le théorème des éléments correspondants, que la quantité de charges négatives induites sur la face faisant face à la surface de A est égale en valeur absolue à la quantité de charges positives sur la surface de A ; d'où :

$$Q_B^{\text{int}} = -Q_A$$

Mais on sait que la charge totale de B est nulle, car celui-ci est supposé neutre :

$$Q_B = Q_B^{\text{int}} + Q_B^{\text{ext}} = 0$$

ce qui donne

$$Q_B^{\text{ext}} = -Q_B^{\text{int}} = Q_A$$

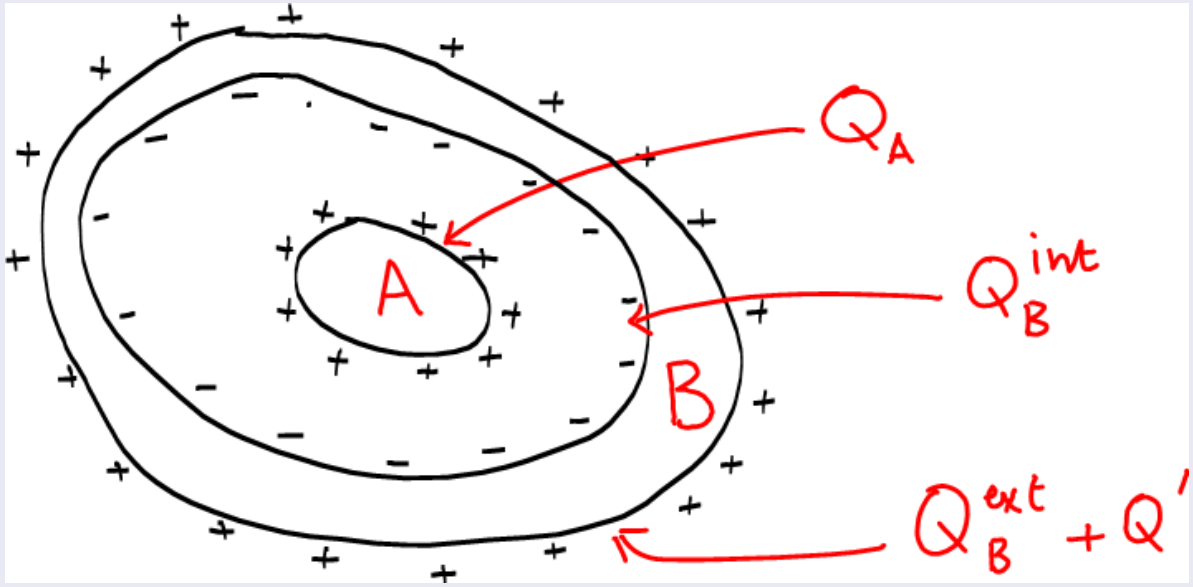
La charge électrique qui apparait sur la surface extérieure de B est égale exactement à la charge positive sur A.

Remarque importante

On doit faire donc la distinction entre deux types de charges : charges libres sur A obtenues par électrisation de A, et les charges induites sur B dues à un réarrangement de ces propres charges électriques une fois rapproché de A.

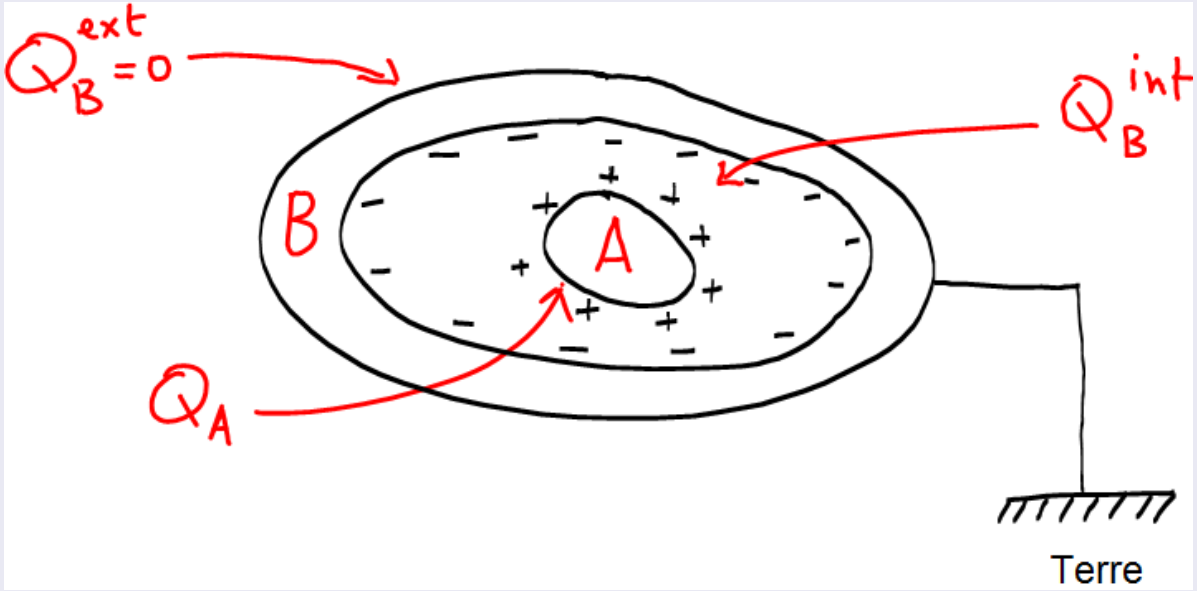
2. Le conducteur B est isolé mais porte initialement une charge électrique sur sa surface extérieure Q'_B. La charge électrique à l'extérieur de B est donc égale à la charge électrique libre sur B, Q'_B plus la charge induite par influence totale entre A et B, égale à Q_A, à savoir :

$$Q_B = Q'_B + Q_A$$



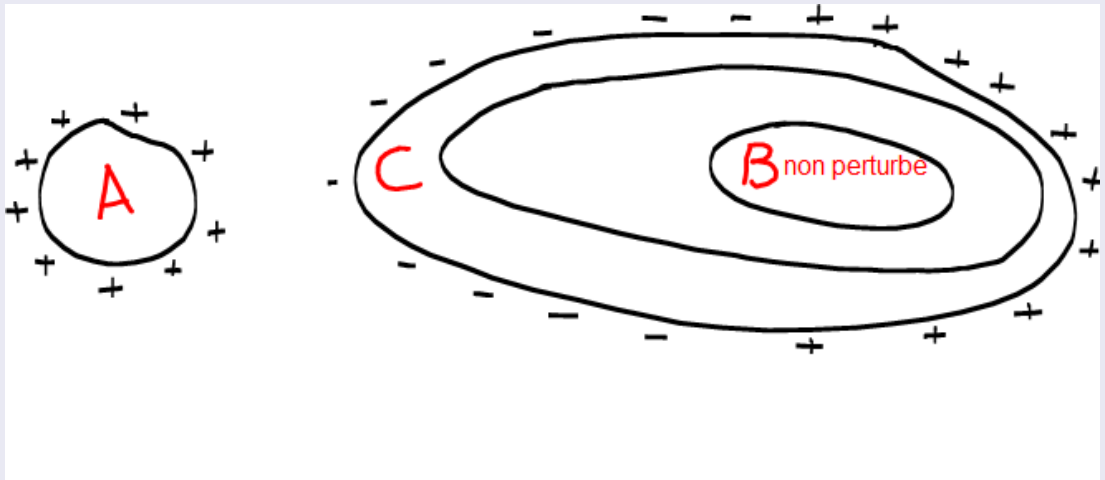
3. Le conducteur B est neutre mais relié au sol à l'aide d'un fil conducteur : Après que le phénomène d'influence ait lieu, les charges positives sur la surface externe de B seront " comblées" par des charges négatives de la terre à travers le fil conducteur . Le conducteur B devient donc chargé négativement par influence totale de la part de A :

$$Q_B = Q_B^{\text{int}} + Q_B^{\text{ext}} = 0 + Q_B^{\text{int}} = -Q_A$$



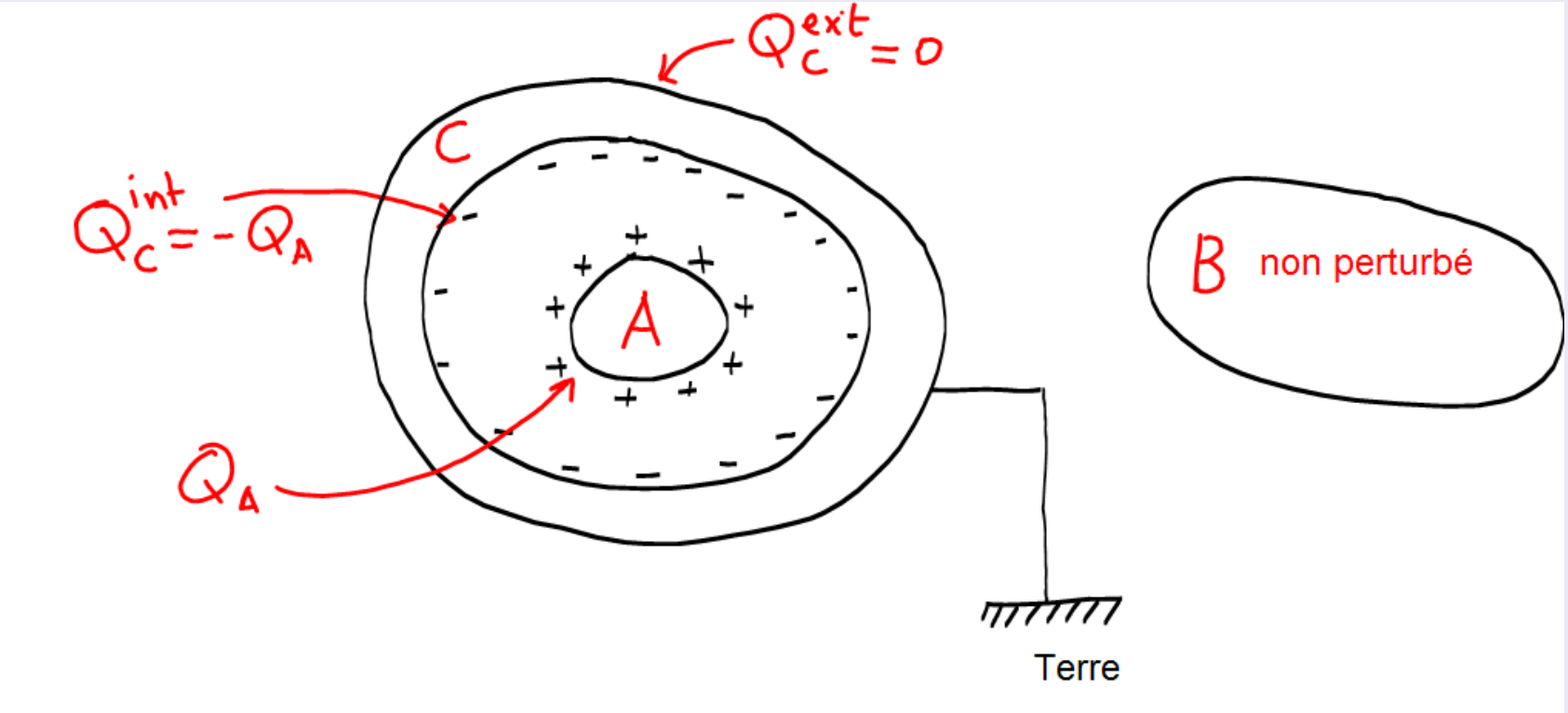
Ces résultats importants trouvent leurs applications dans la réalisation d'une isolation électrique qui permet d'éviter les perturbations qu'entraine des conducteurs chargés sur d'autres conducteurs.

C'est ainsi qu'en mettant un conducteur B au sein d'un conducteur C ; ce dernier va servir à protéger B des perturbations électriques que peut causer le conducteur A chargé à l'extérieur.



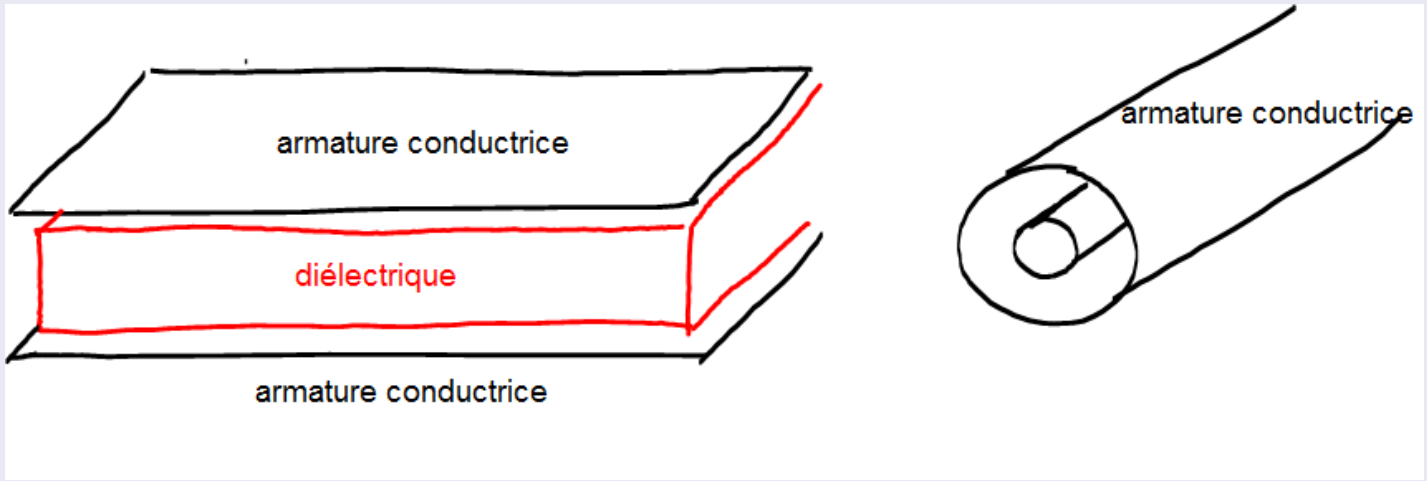
Cela est dû au fait que le champ électrostatique à l'intérieur de C est nul ; et donc B ne sera pas perturbé. C'est bien là l'idée de la cage de Faraday, fabriquée par du métal, permettant d'effectuer des mesures à l'abri des champs extérieurs.

Aussi, on peut éviter au conducteur B une perturbation de sa charge par un conducteur A chargé en mettant ce dernier dans une enceinte conductrice C creuse tout en la reliant par un fil conducteur à la terre : Les charges électriques positives sur la surface externe de C induites par influence entre A vont être "comblées" par des charges négatives venues de la terre. La surface externe de C devient donc neutre ; donc pas de champ électrostatique à l'extérieur de C et B n'est pas perturbé.



Condensateurs

Un condensateur est tout système de deux conducteurs (armatures) en influence(totale ou partielle) entre lesquelles est inséré un matériau isolant (diélectrique).



Le diélectrique est introduit entre les armatures du condensateur afin d'augmenter la capacité de ce dernier.

C'est quoi un diélectrique ?

Un diélectrique est un matériau dans lequel les charges électriques ne peuvent pas se déplacer sur des distances très grandes, sous l'effet d'un champ électrique, comme c'est le cas d'un conducteur. En effet, en appliquant un champ électrique au matériau, les atomes de ce dernier se déforment, ce qui donne naissance à des dipôles électrostatiques, qui eux créent un champ électrique s'opposant au champ électrique externe et tend à le diminuer.

On parle donc de polarisation des atomes du diélectrique, définie comme la somme des moments dipolaires créé au sein du diélectrique, $\vec{P}$, proportionnelle au champ électrique appliqué :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

où *chi* est la susceptibilité du matériau qui détermine la tendance des atomes (molécules) d'un matériau à se polariser sous l'effet d'un champ électrique extérieur. C'est cette polarisation qui donne la valeur de la permittivité électrique des différents matériaux.

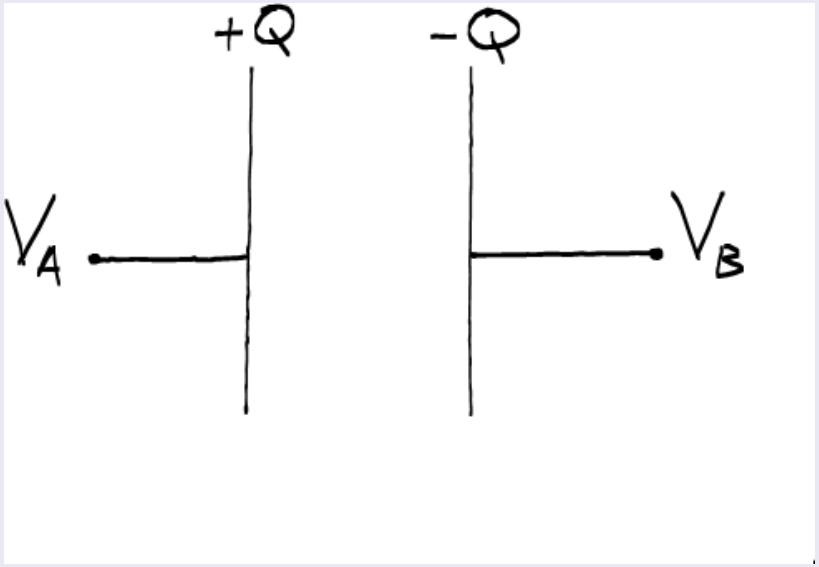
Quand une différence de potentiel est appliquée entre les armatures du condensateur (en le reliant par exemple à une source de tension), chacune des deux armatures du condensateur reçoit une quantité de charges égale mais de polarité différente de celle reçue par l'autre armature : On dit que le condensateur est électriquement chargé.

Les charges électriques restent sur les armatures tant que la différence de potentiel est maintenue entre les deux armatures.

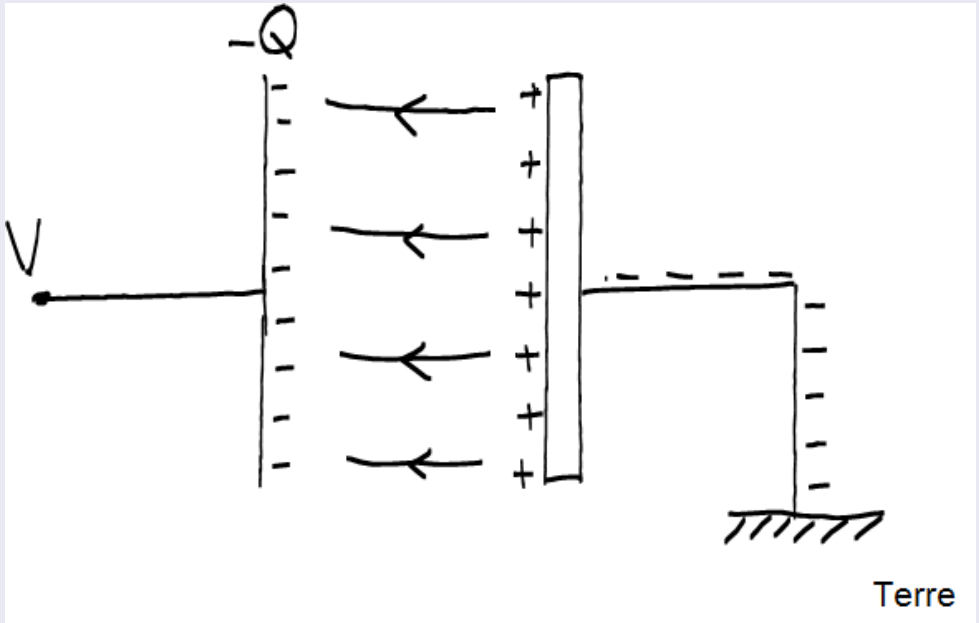
Un condensateur sert donc à emmagasiner (condenser) des charges électriques sur ces armatures et donc de l'énergie électrique dans un endroit fixe de l'espace pour l'utiliser plus tard. Pour cette raison, les condensateurs sont largement utilisées en électronique et en électrotechnique.

Remarque importante

Un condensateur est caractérisé par la valeur absolue de la charge électrique portée par l'une de ces armatures, et non pas par la charge totale déposée sur ces deux armatures, car celle-ci a une valeur algébrique nulle !



D'une façon générale, on peut charger un condensateur en portant une de ces armatures à un potentiel électrique V (en la reliant à une source de tension), ce qui fait que des charges négatives vont se répartir sur l'une de ces armatures. Par effet d'influence, des charges positives vont apparaitre sur la surface de la deuxième armature faisant face à la première armature, alors que sur l'autre face de la deuxième armature apparaitront des charges négatives, mais en reliant cette deuxième armature à la terre celle-ci vont finir par être absorbées par la terre ! On aura donc deux armatures chargées avec la même quantité de charges électriques mais de polarité différente.


-Q
V
Terre

La capacité électrique d'un conducteur porté à un potentiel V puisqu'une quantité de charges électriques est répartie sur sa surface est égale à :

$$C = \frac{Q}{V}$$

Pour un condensateur, la capacité électrique est définie comme :

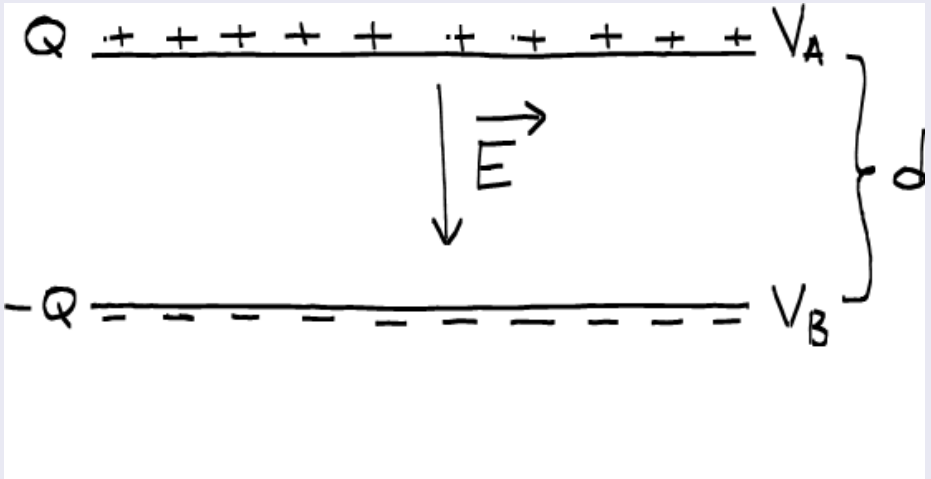
$$C = \frac{Q}{(V_A - V_B)}$$

où Q est la valeur absolue de la charge électrique, V_A le potentiel auquel est portée l'armature A et V_B le potentiel auquel est portée l'armature B (manque une figure).

La capacité électrique est une grandeur caractérisant un condensateur. Sa valeur dépend de sa forme, de ces dimensions et de la position relative des deux conducteurs (armatures) qui le constituent. Elle dépend également de la nature du milieu qui sépare les deux armatures.

Exemple : capacité d'un condensateur plan

Soit un condensateur plan constitué de deux plans conducteurs (armatures) de surface S, séparées d'une distance d avec $d << \sqrt{S}$, et portant respectivement des charges $+Q$ et $-Q$ uniformément réparties.



Le champ électrostatique entre les deux plans conducteurs est (presque !) uniforme et est dirigé de l'armature chargée positivement vers celle chargée négativement, avec une valeur égale à :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

où $\sigma = \dfrac{Q}{S}$ est la densité surfacique des charges électriques

En choisissant l'axe des x selon la normale aux plans, nous obtenons :

$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

où B est un point sur l'armature négative et A un point sur l'armature positive.

Puisque $\vec{E}$ est uniforme en tout point entre les armatures, (sa circulation ne dépend pas du chemin suivi entre A et B, car dérivant d'un potentiel électrostatique), on peut choisir une trajectoire droite entre A et B, sur laquelle $\vec{E}$ est parallèle $d\vec{\ell}$; ce qui donne :

$$\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E\, d\ell$$

ou encore

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B E\, d\ell = E(x_B - x_A) = \frac{\sigma\, d}{\varepsilon_0}$$

Ce qui donne

$$V(A) - V(B) = \frac{\sigma\, d}{\varepsilon_0}$$

Enfin, la capacité du condensateur est donnée par :

$$C = \frac{Q}{(V(A) - V(B))} = \frac{\sigma\, S}{\frac{\sigma\, d}{\varepsilon_0}} = \frac{\varepsilon_0\, S}{d}$$

Remarque

Un matériau diélectrique (isolant) inséré entre les armatures du condensateur permet d'augmenter la capacité de ce dernier, puisque la permittivité électrique du matériau ε est nettement supérieure à celle du vide ε_0 :

$$C = \frac{\varepsilon\, S}{d} > \frac{\varepsilon_0\, S}{d}$$

Permittivité électrique de quelques matériaux

La permittivité électrique d'un matériau est, par convention, écrite sous la forme :

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$$

où ε_0 est la permittivité électrique du vide et ε_r la permittivité relative du matériau.

Permittivité électrique de quelques matériaux

$\varepsilon_r(\text{papier}) = 2.0$, $\varepsilon_r(\text{verre}) = 5.0$, $\varepsilon_r(\text{mica}) = 6.0$, $\varepsilon_r(\text{téflon}) = 18.0$

Remarque importante

La permittivité électrique d'un matériau varie en fonction de la température, l'humidité et la fréquence de la tension appliquée sur le condensateur.

Association de condensateurs

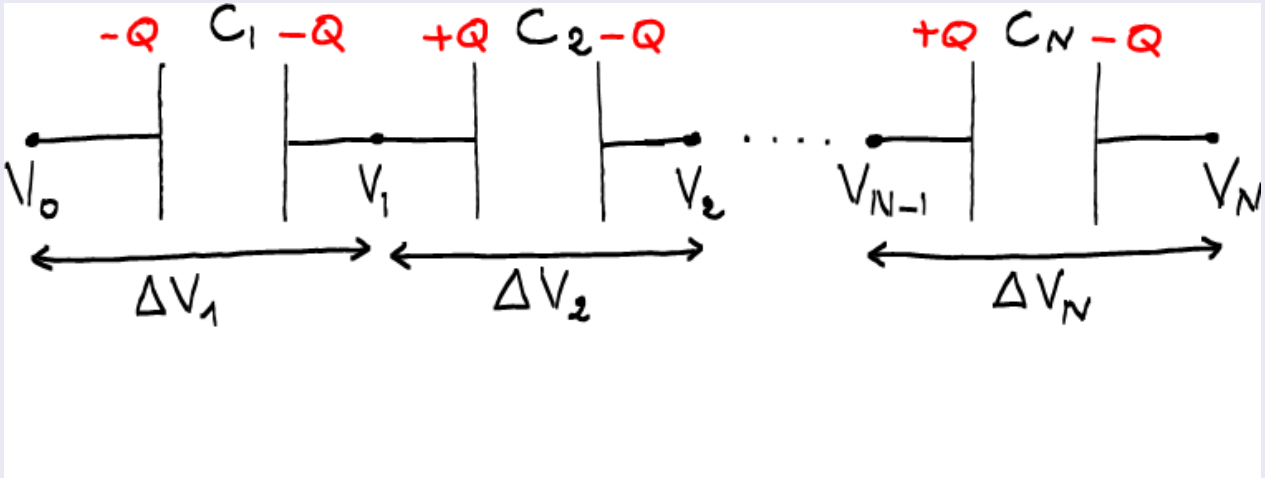
Pour des raisons pratiques, on utilise des associations de plusieurs condensateurs afin d'emmagasiner le plus d'énergie électrique. On distingue deux types d'association :

Association en série :

Considérons l'association de N condensateurs en série. (figure) lorsqu'une différence de potentielle $\Delta V = V_0 - V_N$ est appliquée entre les points extrêmes de l'ensemble des condensateurs, l'armature de gauche du premier condensateur va acquérir une charge

$$Q = V_0\, C_1$$

où V_0 est le potentiel électrostatique auquel est portée l'armature et C_1 la capacité du premier condensateur.



Supposons que tous les condensateurs de la série sont initialement neutres : il va donc s'établir (par influence totale entre armatures opposées) la charge $\pm Q$ sur les armatures des condensateurs adjacents : (image)

La différence de potentiel totale aux bornes de l'ensemble des condensateurs s'écrit tout simplement sous la forme :

$$\Delta V = (V_0 - V_1) + (V_1 - V_2) + \cdots - (V_{N-1} - V_N) = V_0 - V_N$$

Mais on sait que :

$$C_1 = \frac{Q}{V_0 - V_1}, \qquad C_2 = \frac{Q}{V_1 - V_2}, \cdots, C_N = \frac{Q}{V_{N-1} - V_N}$$

ce qui donne

$$\Delta V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \cdots + \frac{Q}{C_N} = Q \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}$$

Cette différence de potentiel électrostatique correspond en effet à celle d'un condensateur unique de capacité équivalente :

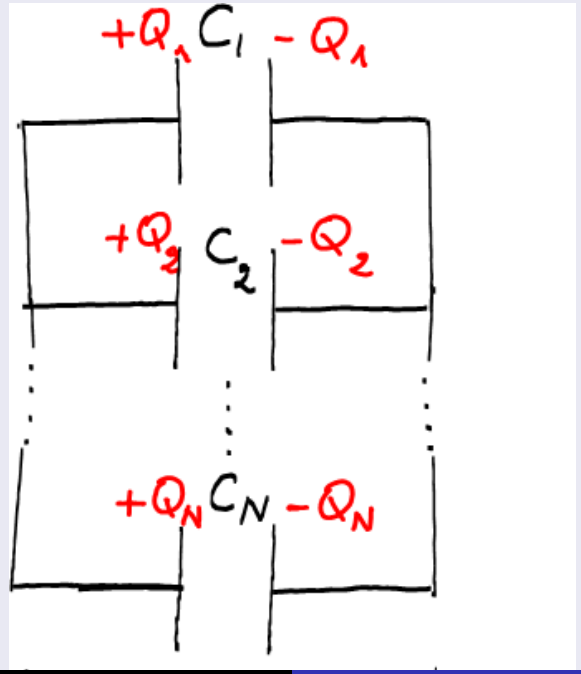
$$\frac{1}{C_{\text{éq}}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}$$

Ce montage est utilisé lorsque la différence de potentiel appliquée est très grande !

Association en parallèle :

Soient N condensateurs (de capacités C_i) placés en parallèle avec la même différence de potentiel V. La charge électrique portée par l'ensemble des condensateurs est donnée par :

$$Q = \sum_{i=1}^{N} Q_i = \sum_{i=1}^{N} C_i\, V = V \sum_{i=1}^{N} C_i$$



La capacité équivalente de ce montage est donc la somme des capacités individuelles, d'où :

$$C_{\text{éq}} = \sum_{i=1}^{N} C_i$$

Ce montage permet d'obtenir une capacité équivalente élevée.

Énergie électrique emmagasinée dans un condensateur

Considérons un condensateur plan de surface S (surface d'une armature) dont :

1. l'armature de haut est portée au potentiel V_1 avec une charge électrique Q
2. l'armature de bas est portée au potentiel V_2 avec une charge électrique $-Q$

séparées d'une distance d

Puisque sur chaque armature le potentiel électrostatique est constant, l'énergie potentielle contenue dans l'armature à V_1 est donnée par :

$$E_P^1 = \frac{1}{2}\iint \sigma_1(\vec{r})V_1(\vec{r})dS = \frac{1}{2}V_1\iint \sigma_1(\vec{r})dS = \frac{1}{2}V_1\,Q$$

et celle contenue dans l'armature à V_2 :

$$E_P^2 = \frac{1}{2}\iint \sigma_2(\vec{r})V_2(\vec{r})dS = \frac{1}{2}V_2\iint \sigma_2(\vec{r})dS = \frac{1}{2}V_2\,(-Q)$$

ce qui donne l'énergie potentielle électrostatique totale du condensateur :

$$E_P = E_P^1 + E_P^2 = \frac{1}{2}V_1\,Q + \frac{1}{2}V_2\,(-Q) = \frac{1}{2}Q\,(V_1 - V_2)$$

ou encore

$$E_P = \frac{1}{2}C\,(V_1 - V_2)^2 \qquad \text{car} \qquad Q = C\,(V_1 - V_2)$$

Mais comme la capacité d'un condensateur plan est donnée par :

$$C = \frac{\varepsilon S}{d}$$

et la différence de potentielle entre les deux armatures est égale à

$$V_1 - V_2 = E\,d$$

où E est le module du champ électrostatique régnant entre les deux armatures, on obtient :

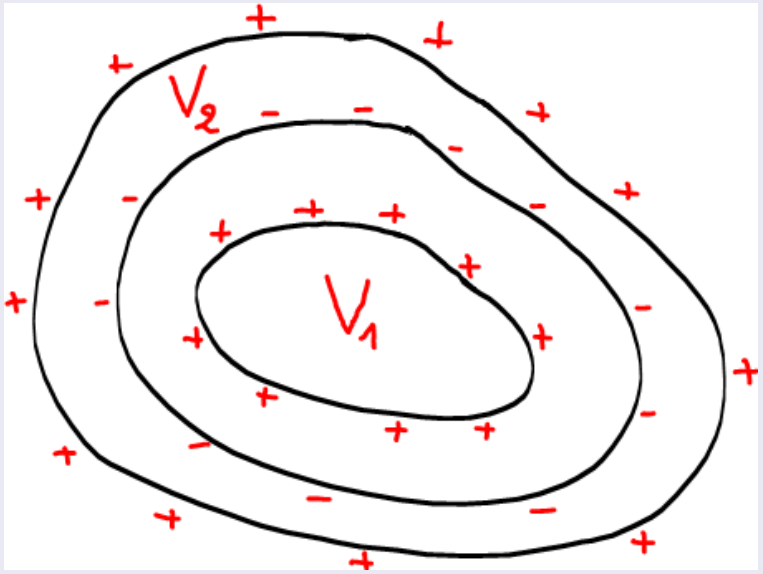
$$E_P = \frac{1}{2}\varepsilon S\,d\,E^2$$

On définit la densité volumique de l'énergie électrique emmagasinée entre les armatures du condensateur comme :

$$e_P = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

Considérons un condensateur plan de surface S (surface d'une armature) dont :

1. l'armature interne est portée au potentiel V_1 avec une charge électrique Q
2. l'armature externe a une charge électrique $-Q$ sur sa surface intérieure et une charge $+Q$ sur sa surface extérieure et portée à un potentiel V_2.



L'énergie électrostatique du condensateur est égale à :

$$E_P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} Q_i \, V_i$$

mais comme on a trois ensembles de charges électriques, l'expression ci-dessus devient :

$$E_P = \frac{1}{2} \left[Q_1 \, V_1 + Q_2^{\text{int}} \, V_2 + Q_2^{\text{ext}} \, V_2 \right]$$

ou encore

$$E_P = \frac{1}{2} \left[QV_1 - QV_2 + QV_2 \right] = \frac{1}{2} QV_1$$

Puisque

$$V_1 = \frac{Q}{C}$$

on obtient donc

$$E_P = \frac{1}{2} C\, V_1^2$$

Ce résultat est valable si V_2 est nul : l'armature externe est reliée à la terre. rajouter un calcul sur la capacité d'un condensateur cylindrique, le champ électrostatique dans un diélectrique !

Capacité mutuelle

Considérons un conducteur A de capacité C_1, porté à un potentiel V_1, sur lequel est répartie une charge électrique "initiale" Q^1_{initiale} (acquise par électrisation). On écrit :

$$Q_1^{\text{initiale}} = C_1\, V_1 = C_{11}\, V_1$$

On amène un deuxième conducteur B de capacité C_2, porté à un potentiel V_2, sur lequel est répartie une charge électrique Q^2_{initiale}, avec

$$Q_2^{\text{initiale}} = C_2\, V_2 = C_{22}\, V_2$$

La présence du conducteur B chargé au voisinage du conducteur A va provoquer une nouvelle répartition de la charge électrique "propre" de A en son sein de telle sorte que :

$$Q_1 = Q_1^{\text{initiale}} + Q_1^{\text{influence}}$$

où $Q_1^{\text{influence}}$ est la charge électrique apparue sur A par influence mutuelle avec B.

Sa quantité dépend justement du potentiel électrostatique V_2 de B, à savoir :

$$Q_1^{\text{influence}} = C_{12}\, V_2$$

où C_{12} représente la capacité du conducteur B à faire réorganiser les charges électriques propres de A par influence mutuelle.

Pour cette raison, on appelle C_{12} capacité mutuelle de B sur A. On écrit donc :

$$Q_1 = C_{11}\, V_1 + C_{12}\, V_2$$

Remarque

Vous devez maintenant comprendre l'utilité du symbole C_{11} au lieu de C_1 pour représenter la capacité électrique du conducteur A.

De même, la présence du conducteur A chargé au voisinage du conducteur B va provoquer une nouvelle répartition de la charge électrique "propre" de B en son sein de telle sorte que :

$$Q_2 = Q_2^{\text{initiale}} + Q_2^{\text{influence}}$$

où $Q_2^{\text{influence}}$ est la charge électrique apparue sur B par influence mutuelle avec A.

Sa quantité dépend du potentiel électrostatique V_1 de A, à savoir :

$$Q_2^{\text{influence}} = C_{21}\, V_1$$

où C_{21} (capacité mutuelle de B sur A) représente la capacité du conducteur A à faire réorganiser les charges électriques propres de B par influence mutuelle.

On écrit donc :

$$Q_2 = C_{22}\, V_2 + C_{21}\, V_1$$

où C_{22} est la capacité électrique du conducteur B.

Dans le cas général où N conducteurs électriques de capacités électriques $C_{ii} = C_i, i = 1 \cdots N$, portés respectivement à des potentiels $V_i, i = 1 \cdots N$ et portant des charges électriques initiales (n'appartenant pas au conducteur) $Q_i^{\text{initiale}}, i = 1 \cdots N$, respectivement, sont mais au voisinage les uns des autres, la quantité de charge électrique sur chaque conducteur est la somme de toutes les charges électrique apparues sur le conducteur par influence mutuelle avec les autres conducteurs au voisinage, plus la charge électrique déposée initialement sur le conducteur lui-même, à savoir :

$$Q_i = Q_i^{\text{initiale}} + \sum_{j \neq i}^{N} Q_j^{\text{influence}}$$

ou encore

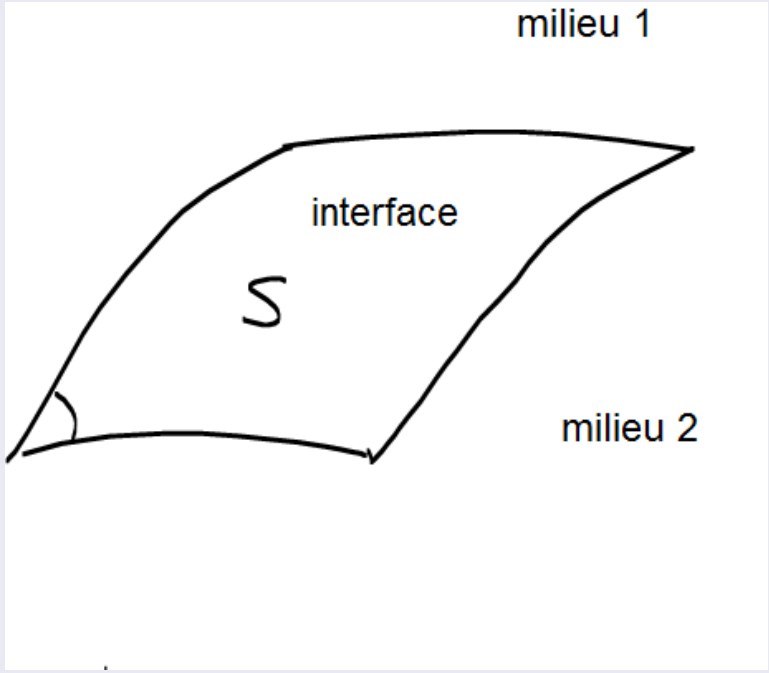
$$Q_i = C_{ii} V_i + \sum_{j \neq i}^{N} C_{ij} V_j = \sum_{j=1}^{N} C_{ij} V_j$$

On peut donc identifier deux types de coefficients de capacité :

1. Capacité propre C_{ii} de valeur positive toujours (un potentiel électrique a le même signe que la charge électrique qui l'a créé !)
2. Capacité mutuelle $C_{ij} = C_{ji} < 0$ (de valeur négative car un potentiel positif sur un conducteur entraine l'apparition de charges électriques négatives sur un conducteur voisin)

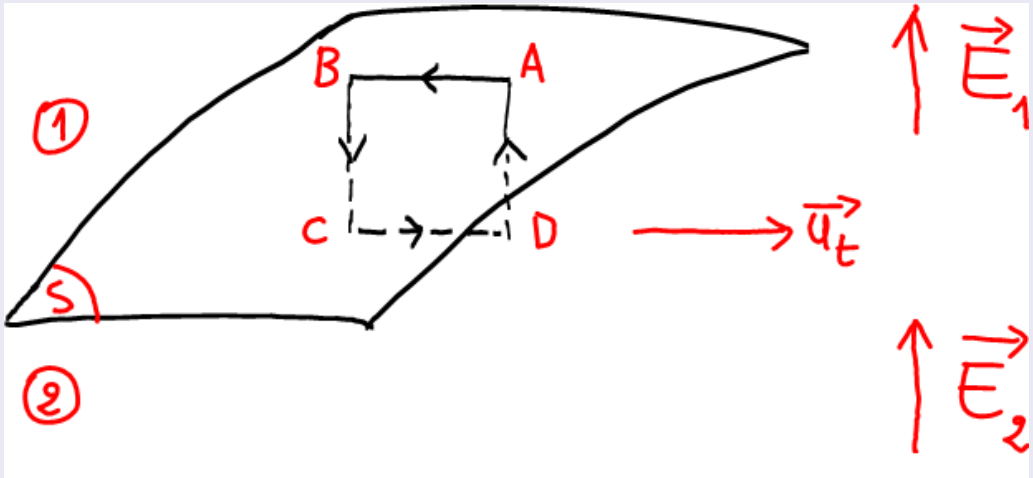
Conditions aux limites entre deux milieux

Considérons deux milieux différents (1) et (2) (conducteurs ou isolants) séparés par une surface (interface) S dans un espace où règne un champ électrique, $\vec{E}_1$ en (1) et $\vec{E}_2$ en (2). En tout point du milieu, le champ électrostatique a une composante tangentielle à la surface et une (ou deux) composantes normales à la surface.



Condiction sur la composante tangentielle du champ électrostatique

Imaginons un contour fermé $ABCDA$ (infiniment petit) avec une partie appartenant au milieu (1) et une deuxième partie appartenant au milieu (2). Les segments AD et BC sont tellement proches l'une de l'autre que la circulation du champ électrostatique le long de ces segments est nulle.



$$\int_B^C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_D^A \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

le symbole $\vec{E}$ représente à la foie les champs électrostatiques $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$!

D'autre part, les segments AB et CD sont choisies très courtes ($AB = CD = \delta\ell$) de telle façon que le champ électrostatique y est constant. Cela nous permet d'écrire :

$$\int_A^B \vec{E}_1 \cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \vec{E}_2 \cdot d\vec{\ell} = \vec{E}_1 \cdot \overrightarrow{AB} + \vec{E}_2 \cdot \overrightarrow{CD}$$

$\overrightarrow{AB} = AB\vec{u}_t$ et $\overrightarrow{CD}\vec{u}_t$ sont les vecteurs de segments appartenant à la surface séparant les deux milieux ($\vec{u}_t$ un vecteur unité tangent à la surface). L'équation ci-dessus devient :

$$-E_{1t}AB + E_{2t}CD = (E_{2t} - E_{1t})\delta\ell$$

D'autre part, on sait que la circulation d'un champ électrostatique le long d'un contour fermé (dans ce cas $ABCDA$) est nulle :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \vec{E}_1 \cdot d\vec{\ell} + \int_B^C \vec{E}_2 \cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \vec{E}_1 \cdot d\vec{\ell} + \int_D^A \vec{E}_2 \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Mais on a déjà obtenu que

$$\int_B^C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_D^A \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Il nous reste donc

$$\int_A^B \vec{E}_1 \cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \vec{E}_2 \cdot d\vec{\ell} = (E_{2t} - E_{1t})\delta\ell = 0$$

sauf que $\delta\ell \neq 0$, ce qui donne enfin

$$E_{2t} - E_{1t} = 0$$

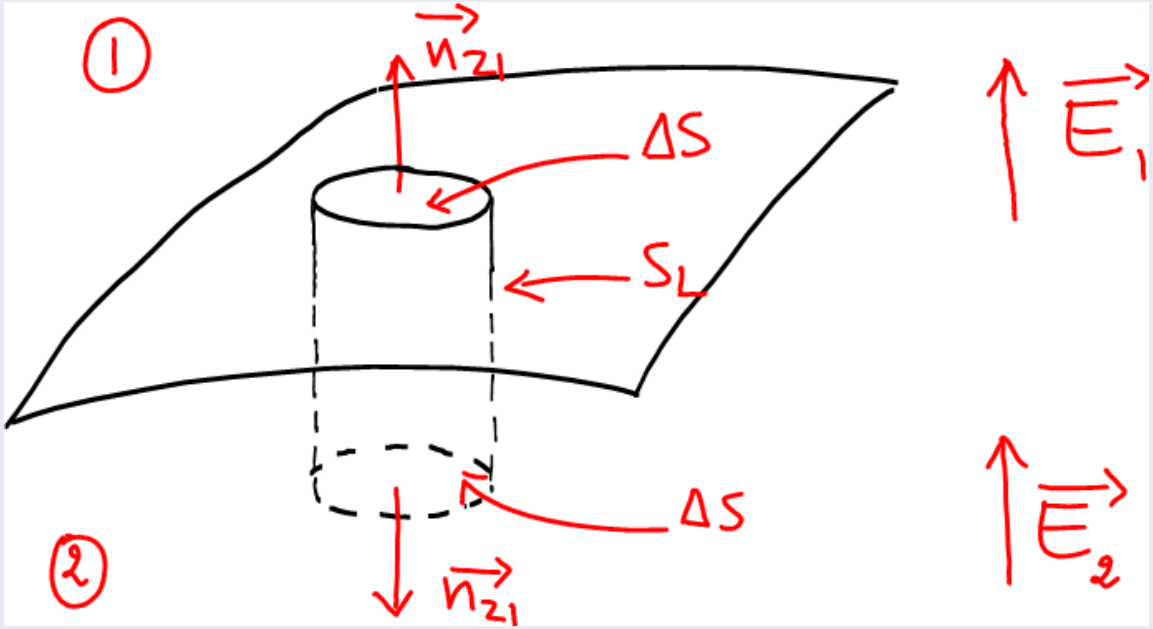
ou encore

$$E_{2t} = E_{1t}$$

Les composantes tangentielles du champ électrostatique des deux côtés de la surface ont les mêmes. Ceci est la condition de continuité de la composante tangentielle du champ électrostatique à l'interface entre deux milieux.

Condiction sur la composante normale du champ électrostatique

Imaginons maintenant un cylindre de taille infiniment petite (de surface de base ΔS) partagé entre les deux milieux et dont la hauteur est normale à la surface séparant les deux milieux, supposée chargée. Par conséquent, le champ électrostatique créé par cette charge (de distribution σ) est normal à la surface.



Selon le théorème de Gauss, on a

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon}$$

sauf que cette égalité est applicable pour un seul milieu.

Pour le besoin de notre étude, on définit un vecteur appelé communément vecteur de déplacement $\vec{D}$ dont le module ne dépend pas de la permittivité électrique du milieu considéré et défini comme

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

où ε est la permittivité électrique du milieu.

Ce qui nous permet de réécrire l'équation de la loi de Gauss comme

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{\ell} = Q_{int}$$

plus pratique à utiliser dans notre cas que celle utilisée habituellement !

Le théorème de Gauss appliquée à la surface du cylindre donne

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{S_1} \vec{D}_1 \cdot d\vec{\ell} + \iint_{S_2} \vec{D}_2 \cdot d\vec{\ell} + \iint_{S_L} \vec{D}_{1,2} \cdot d\vec{\ell} = Q_{int}$$

Puisque le champ électrostatique est tangent à la surface latérale du cylindre, on aura

$$\iint_{S_L} \vec{D}_{1,2} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

D'autre part, les surfaces de base du cylindre sont tellement petites que le champ électrostatique y est constant, d'où

$$\iint_{S_1} \vec{D}_1 \cdot d\vec{\ell} = D_{1n}\Delta S_1$$

et

$$\iint_{S_2} \vec{D}_2 \cdot d\vec{\ell} = -D_{2n}\Delta S_2$$

Ce qui donne

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{\ell} = D_{1n}\Delta S_1 - D_{2n}\Delta S_2 = (D_{1n} - D_{2n})\Delta S = Q_{int} = \sigma\Delta S$$

ou encore

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma$$

Mais on sait que

$$D_{1n} = \varepsilon_1 E_{1n}$$

et

$$D_{2n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

ce qui donne enfin

$$\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \sigma$$

Les composantes du champ électrostatique à l'interface entre deux milieux ne sont pas continues.