Magnétostatique

Mohamed Mebrouki

EPST Tlemcen

24 Avril 2016

Historique

1. Depuis l'antiquité, les gens ont remarqué l'existence d'une pierre, appelée par les chinois pierre tendre, ayant la capacité d'attirer vers elle des objets légers en fer.
2. En Grèce, Thalès de Milet (-625, -547) connaissait déjà les vertus de la pierre d'aimant, connue sous le nom de magnètès, lequel a évolué jusqu'à arriver à son nom moderne de magnétite.
3. Les premiers aimants furent extraits d'un gisement situé sur le mont de Sipyle, proche d'une ville d'asie mineure nommée " Magnesium ad Sipylum".
4. Toutefois, déjà à cette époque, les gens ont remarqué qu'un plateau d'argent ne peut pas empêcher les pierres d'aimant d'attirer le fer, et que seul le fer pouvait constituer un écran efficace contre cette attirance (blindage magnétique).

5. Des historiens chinois rapportaient que le caractère de directivité vers les pôles géographiques terrestres des pierres d'aimants naturelles étaient connu depuis très longtemps.
6. Le plus ancien outil directif est une pierre d'aimant naturelle sculptée et polie en forme de cuillère fabriquée en chine et qui est en quelque sorte l'ancêtre de la boussole. En fait, la poignée de la cuillère est un pôle nord, puisqu'elle est attirée par le pôle sud magnétique de la terre, supposée coïncider (à peu prés) avec le pôle sud géographique.
7. Les boussoles faisaient donc leur apparition et furent utilisées dans la navigation maritime.
8. En 1269, un certain Pierre Pélerin de Maricourt écrivit une lettre célèbre intitulée "De Magnete" où il exposa ses connaissances sur le magnétisme " phénomènes liés à l'attraction des objets par d'autres objets" et introduisit la notion de pôles

9. En 1600, William Gilbert, un médecin anglais écrivit un ouvrage également intitulé “De Magnete”, considéré comme le premier ouvrage de physique expérimentale publié en Angleterre. Il y mentionna les règles d'attraction et de répulsion des aimants par leurs pôles, l'aimantation d'un barreau de fer doux dans un champ magnétique et l'influence de la chaleur sur le magnétisme du fer.
10. Gilbert fut le premier à proposer d'assimiler la terre à un aimant et conclut que cela est la raison pour laquelle la boussole indique le nord ; jusqu'alors attribuée, à tort, à une grande ile magnétique au pôle nord.
11. Gilbert s'intéresse aux différences entre les propriétés de l'ambre frotté et celle de l'aimant. Ainsi, l'aimant n'attire que le fer, tandis que l'ambre attire des matériaux très divers.
12. Une unité de force magnétique est appelée le gilbert en son honneur.

13. En 1750, John Mitchell, un physicien britannique, publia un texte sur les aimants (A Treatise of artificial magnets), dans lequel il fournit une méthode simple pour augmenter l'intensité d'aimantation.
14. L'encyclopédie de Denis Diderot et Jean Lerond d'Alembert résume les connaissances en magnétisme accumulées jusqu'à la deuxième moitié du 18 ème siècle (1779) sous trois rubrique : la notion de pôles, la vertu attractive et la vertu communicative, et constate l'absence d'une théorie sérieuse du magnétisme.

Pôle magnétique

1. Il est possible d'observer des lignes dites magnétiques à l'aide de la limaille de fer : Un barreau aimanté possède deux pôles où se concentrent les lignes de champ.
2. Un aimant brisé peut rester magnétique avec deux pôles pour chaque pièce.
3. La terre est douée de deux pôles, nord et sud ; mais l'axe des pôles magnétiques ne coïncide pas avec l'axe des pôles géographiques. La déclinaison magnétique est même variable avec le temps.
4. Le pôle sud de l'aimant se dirige vers le pôle boréal et son pôle nord vers le pôle austral.

Vertu attractive

1. Deux pôles contraires s'attirent et deux pôles de même polarité se repoussent.
2. La chaleur excessive diminue la vertu de l'aimant, qui la retrouve après refroidissement.
3. On peut augmenter l'intensité de l'aimantation en leur adaptant des armatures en fer judicieusement disposées.

Vertu communicative

1. Il est connu depuis l'antiquité que la pierre d'aimant peut communiquer son magnétisme à un morceau de fer, par simple influence, en approchant les deux substances, ce qui peut conférer un magnétisme permanent.
2. Des tiges en fer s'aimantent lorsqu'elles restent longtemps en position verticale. La foudre aimante l'acier.
3. On peut aimanter un clou en le faisant rougir en feu, et refroidir en l'orientant nord-sud : Cette démarche était utilisée par les chinois pour fabriquer leurs boussoles.

Champ magnétique

1. Les travaux de Charles Coulomb ont montré que les forces entre " masses ou charges magnétiques" décroient comme le carré de la distance entre elles.
2. Dans la foulée, Denis Poisson (1781-1840) introduisit la notion de " champ magnétique", comme force agissant sur l'unité de "masse magnétique" en tout point de l'espace.
3. A la différence des charges électriques, les "charges" magnétiques semblent aller par paires, constituant des "dipôles magnétiques" (deux charges magnétiques égales et de polarité opposée).
4. En Avril 1820, lors d'un cours sur l'électricité, Hans Christian Œrsted, un physicien et chimiste danois, découvrit la relation entre l'électricité et le magnétisme. Il démontra par l'expérience qu'un fil transportant un courant électrique était capable de faire bouger l'aiguille aimantée d'une boussole.

Champ magnétique

5. Il conclut qu'un courant électrique circulant dans un fil pouvait créer un champ magnétique. Il a observé aussi que si le courant électrique était inversé, la déviation de la boussole aurait changé. En plus, il remarqua que la force qui dévie l'aiguille était non radiale.
6. Dans les semaines qui suivirent, André-marie Ampère reproduisit cette expérience historique et réussit à en donner une formulation mathématique élégante. Il montra qu'une boucle circulaire de courant électrique (continu) engendrait un champ magnétique et suggéra que le magnétisme de la matière pourrait bien être créé par de petites boucles de courant électrique à l'échelle moléculaire.

7. C'est alors que débute la célèbre confrontation entre les tenants de l'approche coulombienne (description par des masses magnétiques ou pôles) et ceux de l'approche ampérienne (description du magnétisme par des courants électriques). Aujourd'hui, ces deux approches sont tenues pour complémentaires : L'approche ampérienne est surtout utile en physique atomique, et l'approche coulombienne en électrotechnique.
8. En 1821, le phénomène d'induction était découvert par le physicien anglais Michael Farday, qui construisit la première dynamo.
9. Pierre-Simon Laplace établit l'expression de la force agissant sur un conducteur parcouru par un courant électrique et soumis à un champ magnétique.

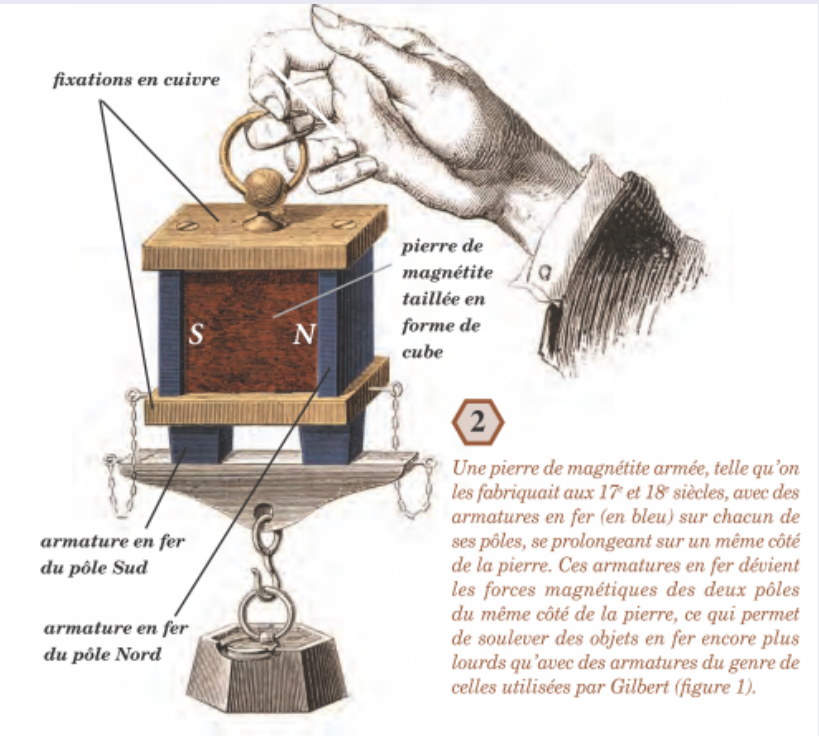
10. Ces découvertes bouleversèrent la physique en unifiant les interactions électriques et magnétiques, et permettent l'établissement des théories solides pouvant expliquer des phénomènes naturels qui étaient, jusqu'alors, restés énigmatiques.
11. En 1864, le physicien écossais James Clark Maxwell venait couronner les efforts d'un demi siècle de travaux scientifiques en établissant la théorie de l'électromagnétisme, qui reste encore de nos jours la base analytique incontournable du magnétisme.

Propriétés d'un aimant

1. Un aimant naturel qui a la propriété d'attirer vers lui des petits morceaux de fer est une roche minérale magnétique composée principalement d'oxyde de fer Fe_3O_4 (magnétite) provenant de la lave volcanique qui s'est refroidi lentement, donnant ainsi naissance à une aimantation dans la direction nord-sud. Cette aimantation de la magnétite est beaucoup plus forte que celle du fer qui aurait été chauffé et refroidi lentement.
2. Dés l'antiquité, on avait remarqué que les propriétés d'un aimant ne se manifestent qu'à ses extrémités appelées pôles. Ces deux pôles ; Sud et nord sont différents.
3. L'expérience montre que deux pôles de même nature (nom) se repoussent alors que deux pôles de noms contraires s'attirent.
4. L'expérience montre aussi qu'il est impossible de séparer les deux pôles. Car si on casse un aimant en deux, les deux pôles apparaissent dans les deux morceaux.

Propriétés d'un aimant

5. En appliquant une armature en fer sur un pôle magnétique d'une pierre d'aimant la force d'attraction du pôle de la pierre est détournée vers les bords de l'armature. Tout se passe comme si le fer canalisait la force magnétique, ce qui permet de soulever des objets en fer encore plus lourds que sans ces armatures.

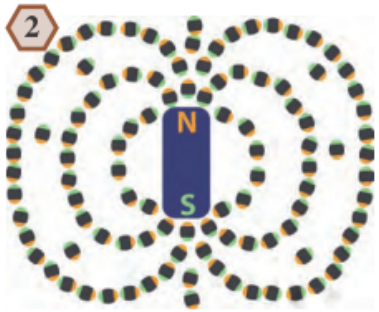


Propriétés d'un aimant

6. L'expérience montre qu'en chauffant une pierre d'aimant jusqu'à ce qu'elle devienne rouge, son pouvoir d'attraction pour le fer disparait même après l'avoir refroidi. Il en est de même pour un morceau de fer qui aurait été aimanté par contact ; lorsqu'on le chauffe suffisamment fort et longtemps, il perd son aimantation.
7. Toutefois, si le refroidissement se fait très lentement et que la pierre d'aimant ne bouge pas pendant ce temps, il apparaitra, de nouveau, une aimantation dans la direction Nord-sud. Le nouveau pôle nord magnétique fera face au nord et le nouveau pôle sud magnétique fera face au sud.
8. L'expérience montre aussi qu'un morceau de fer non aimanté est toujours attiré par un aimant, peu importe le pôle de l'aimant que l'on approche du morceau de fer. Ceci est dû au fait que le fer devient aimanté temporairement lorsqu'il est approché d'un aimant.

Propriétés d'un aimant

9. Cette aimantation temporaire (ou induite) est à l'origine des lignes de champ de fer qui se reproduisent lorsque de la limaille de fer est répandue autour d'un aimant. Ces dessins appelés spectres magnétiques sont dus aux pôles magnétiques induits dans une parcelle de fer " petit morceau de fer" qui interagissent avec les pôles magnétiques induits dans les parcelles de fer voisines. Il en résulte que les parcelles s'attirent et s'attachent les unes aux autres pour former les lignes du spectre magnétique.



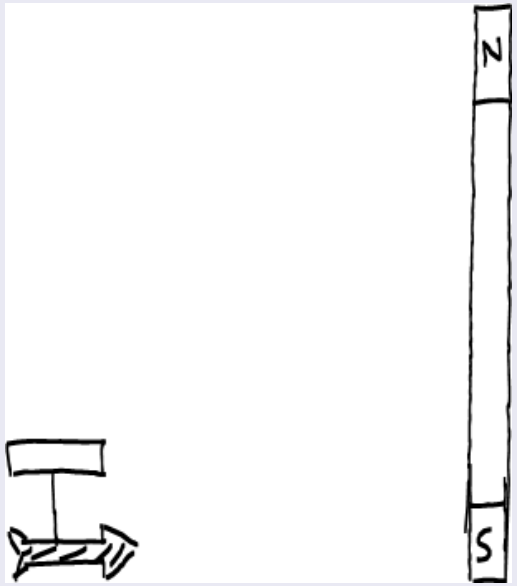
Un pôle Sud magnétique (en vert) et un pôle Nord magnétique (en orangé) sont induits dans chaque parcelle de fer autour d'un aimant. Une parcelle tend à s'aligner dans la même direction qu'une petite aiguille de boussole le ferait au même endroit, et les parcelles de fer s'attirent entre elles.

Propriétés d'un aimant

10. On parle plutôt de lignes de force du champ magnétique (appellation moderne de la zone d'influence qui entoure un aimant), qui sont d'ailleurs plus denses là où la force magnétique est plus forte ; ce qui se traduit par une action plus vigoureuse pour aligner l'aiguille d'une boussole.
11. Chaque ligne qui part de l'aimant revient en un autre point de ce dernier, formant ainsi un anneau avec l'aimant.
12. Plus tard, on a introduit le concept du champ magnétique défini comme une région de l'espace où, en chaque point, le pôle d'un petit aimant est soumis à l'action d'une force. Il est donc tangent en tout point à une ligne de champ.
13. C'est ainsi que les lignes de champ magnétique sortent du pôle nord de l'aimant et rentrent par le pôle sud (convention).

Expérience de Coulomb

1. En 1785, Coulomb a effectué une expérience simple pour quantifier les forces entre deux pôles magnétiques. Il mesura la fréquence d'oscillation d'une petite aiguille aimantée de $2.5cm$, à différentes distances de l'un des pôles d'une longue tige aimantée de $63.5cm$.
2. Il démontre que les forces horizontales qui font osciller une aiguille aimantée sont proportionnelles au carré de la fréquence d'oscillation de l'aiguille.



Expérience de Coulomb

En effet

$$\mathrm{I}\ddot{\theta} = -C\theta$$

avec I le moment d'inertie de l'aiguille et C le coefficient de torsion du fil portant l'aiguille. Pour une oscillation sinusoïdale, la variation de l'angle d'oscillation est donnée par :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t)$$

ce qui en remplaçant dans l'équation ci-dessus donne

$$\omega^2 \mathrm{I} = C$$

La force F qui fait tourner l'aiguille est donc égale au couple de rappel $C\theta_0$ divisé par la demi-longueur de l'aiguille (ℓ), ce qui donne enfin

$$F = \frac{\mathrm{I}\theta_0}{\ell}\omega^2$$

Expérience de Coulomb

3. En faisant des mesures de la force magnétique (fréquence) pour différents emplacements de l'aiguille par rapport au pôle de la longue tige, Coulomb découvrit que cette force entre deux pôles magnétiques variait comme l'inverse du carré de la distance R entre les deux pôles (pôle de l'aiguille et celui de la tige), alors qu'elle était proportionnelle au produit de l'intensité M_1 et M_2 de chacun des pôles :

$$F = k\frac{M_1 M_2}{R^2}$$

où k est une constante et M représente une quantité introduite par Coulomb lui-même et qui représentait selon lui " la quantité du fluide magnétique" ou " la "masse magnétique" présente dans un pôle. Il mesura cette grandeur M en comparant l'oscillation des aiguilles et des tiges aimantées, sous l'action du champ magnétique terrestre. En fait, cette théorie de masse magnétique ce qui en remplaçant dans l'équation ci-dessus donne

Expérience d'Œrsted

1. La découverte de Hans Œrsted, en 1820, qu'une boussole peut être déviée par un courant électrique continu (l'intensité et la direction ne changent pas au cours du temps) établissait pour la première fois un lien étroit entre l'électricité et le magnétisme.
2. Les expériences faites par Œrsted ont montré que les lignes de champ magnétique (orientation de la boussole en tout point au voisinage du fil parcouru par le courant électrique) étaient des cercles autour du fil. Ces lignes indiquent en fait la direction des forces qui s'exercent sur les pôles magnétiques d'un objet aimanté.

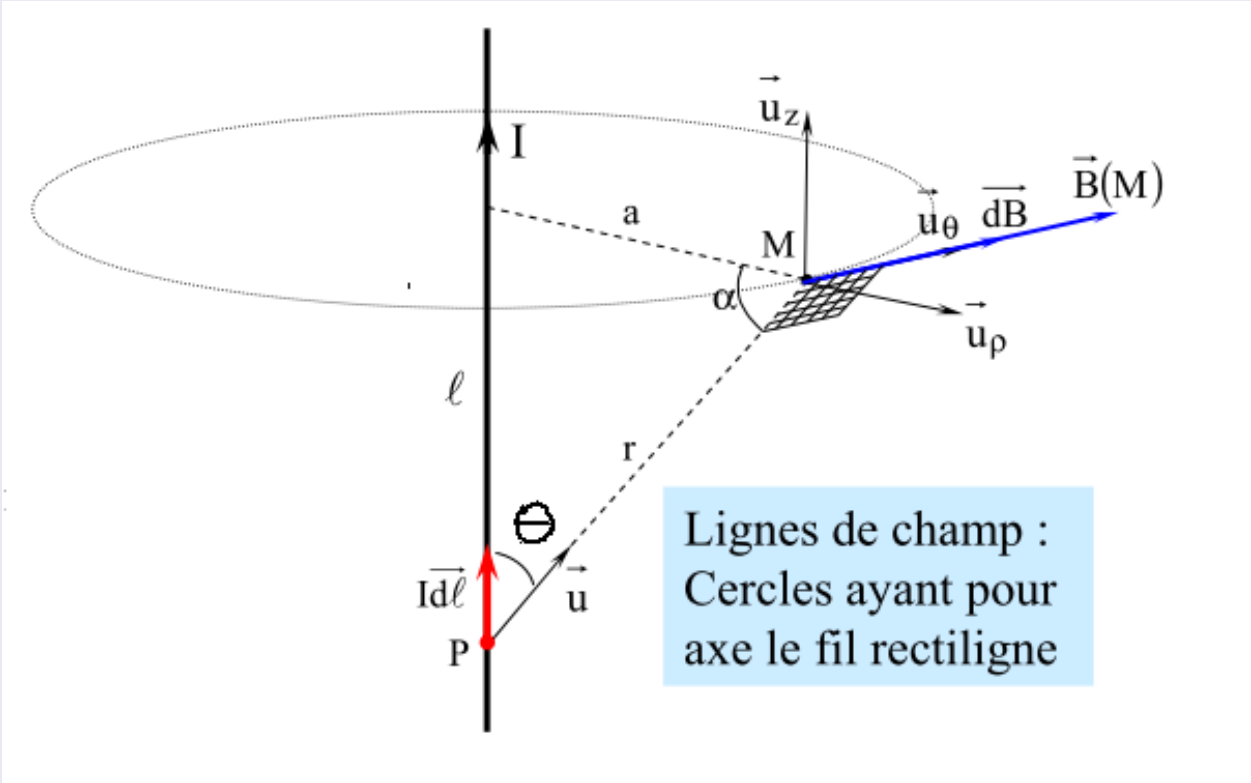
La loi de Biot et Savart

1. Dés le mois de septembre 1820, Jean-Baptiste Biot et Félix Savart entreprennent de quantifier le nouveau phénomène découvert par Œrsted. Ils ont donc monté une expérience qui leur a fait comprendre que la force en un point P où se trouve un objet aimanté (par exemple une boussole) est due à la contribution de chacun des bouts d'un fil conducteur de longueur $d\ell$ parcouru par un courant électrique (continu).
2. Aidés par Laplace, un astronome et mathématicien français, Biot et Savart sont parvenus à établir l'expression recherchée :

$$dF = m\mathrm{I}\frac{\sin\theta}{r^2}d\ell$$

où dF est la force produite en M par l'élément de fil $d\ell$ situé en P, parcouru par un courant d'intensité I, éloigné de $d\ell$ d'une distance $r = |\overrightarrow{PM}|$, θ l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{PM}$ avec l'élément $\vec{d\ell}$ et m la "masse magnétique" de l'objet aimanté en M.

La loi de Biot et Savart



La loi de Biot et Savart

3. En remplaçant $\frac{dF}{m}$ par dB, on obtient à une constante prés, ce qu'on appelle aujourd'hui la loi de Biot et Savart, permettant de calculer le champ magnétique $\vec{B}$ produit par un courant électrique continu. Sa forme vectorielle est donnée par :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathrm{I} d\vec{\ell} \wedge \overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PM}|^3}$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide égale à $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{Henry}{m}$.

La loi de Biot et Savart

4. Rappelons que l'intensité de courant I est donnée par :

$$\mathrm{I} = \iint \vec{\mathrm{J}} \cdot d\vec{S}$$

où $\vec{\mathrm{J}}$ est le vecteur densité de courant, supposé dans notre cas constant sur toute la section du fil conducteur S. Cela permet d'écrire

$$\mathrm{I} = \vec{\mathrm{J}} \cdot \vec{S}$$

Multiplions les deux membres de l'équation ci-dessus par $d\vec{\ell}$, nous obtenons

$$\mathrm{I}d\vec{\ell} = \vec{\mathrm{J}} \cdot (\vec{S} \cdot d\vec{\ell}) = \vec{\mathrm{J}}dV$$

où dV est un élément de volume du fil conducteur.

Expression du champ magnétique en terme du vecteur densité de courant électrique

1. L'élément $d\ell$ du fil conducteur en P crée donc un champ magnétique $d\vec{B}$ en un point M égal à :

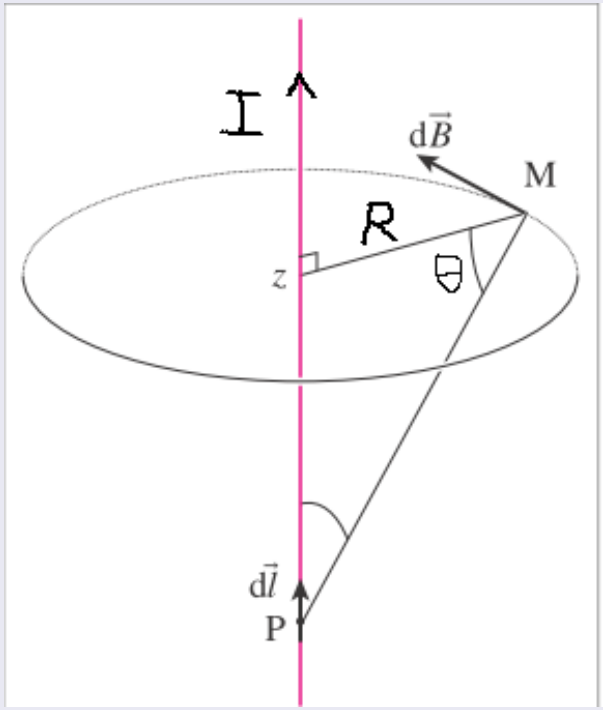
$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathrm{J}} \wedge \overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PM}|^3} dV$$

2. L'intégration de l'expression ci-dessus sur le volume total du fil donne le vecteur du champ magnétique créé en M par un fil conducteur parcouru par un courant électrique continu :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{\mathrm{J}} \wedge \overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PM}|^3} dV$$

Champ magnétique créé par une fil conducteur infini parcouru par un courant électrique continu :

1. Nous nous proposons de calculer le champ magnétique $\vec{B}$, créé par un fil conducteur supposé infini et parcouru par un courant continu I, en un point M sur un cercle de rayon R autour du fil.



En effet

$$dB(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathrm{I} d\vec{\ell} \wedge \overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PM}|^3}$$

avec

$$|\overrightarrow{PM}| = \frac{R}{\cos\theta}$$

où θ est l'angle qu fait le rayon du cercle R et la droite $\overrightarrow{PM}$.

2. D'autre part, on a

$$|\mathrm{I}d\vec{\ell} \wedge \overrightarrow{PM}| = |\mathrm{I}d\ell||\overrightarrow{PM}| \sin(d\vec{\ell}, \overrightarrow{PM})$$

ou encore

$$|\mathrm{I}d\vec{\ell} \wedge \overrightarrow{PM}| = \mathrm{I}d\ell\, PM \cos\theta = \mathrm{I}Rd\ell$$

3. D'autre part, on a

$$OP = \ell = R\tan(\theta)$$

Ce qui donne

$$d\ell = \frac{R}{\cos^2\theta} d\theta$$

En remplaçant ces expressions dans l'équation ci-dessus, on obtient

$$dB(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\mathrm{I}R\frac{R}{\cos^2\theta}\frac{\cos^3\theta}{R}d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{I}}{R}\cos\theta d\theta$$

4. Le sens du champ magnétique créé par le fil conducteur en M est obtenu en utilisant la convention du tire-bouchon. c'est ainsi que $\vec{B}$ est perpendiculaire au plan contenant l'élément $d\vec{\ell}$ et le vecteur $\overrightarrow{PM}$.
5. Le module du champ magnétique créé en M par un fil conducteur supposé infini, s'obtient en intégrant l'expression par rapport à θ de $\theta = -\frac{\pi}{2}$ et $\theta = -\frac{\pi}{2}$, à savoir :

$$B(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{I}}{R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta = \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{2\pi R}$$

6. Le champ magnétique est mesuré en *Tesla* (une sous unité du Tesla est le Gauss : 1 gauss=10^{-4} tesla).
7. Au passage, on rappelle que le champ magnétique terrestre a une valeur plus ou moins fluctuante autour de 5×10^{-5} *Tesla*.

Remarque

Le fil conducteur doit se refermer quelque part sur lui-même ne serait ce que pour le besoin de la circulation du courant électrique.

Champ magnétique créé par une charge électrique en mouvement (vitesse constante)

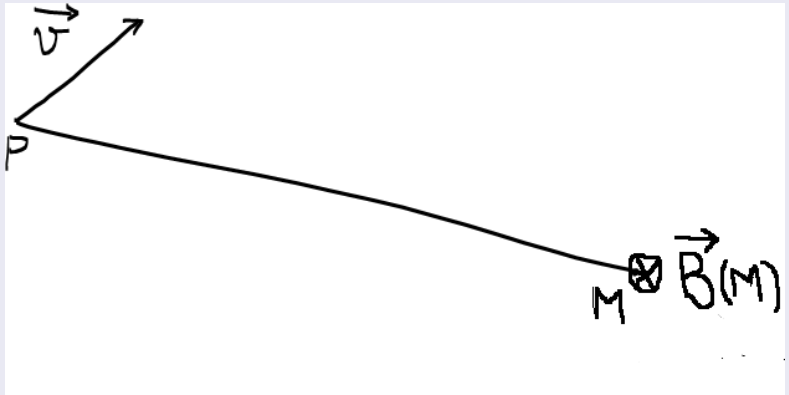
1. Reprenons l'expression du champ magnétique élémentaire obtenue ci-dessus :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathrm{J}} \wedge \overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PM}|^3} dV$$

Tout en sachant que

$$\vec{\mathrm{J}} = n\, q \vec{v}$$

où n est la densité de charges électrique dans le fil, q la charge du porteur de charge et $\vec{v}$ la vitesse moyenne d'un porteur de charge.



2. Ce qui permet d'écrire :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{n\, dV\, q\vec{\mathrm{v}} \wedge \overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PM}|^3}$$

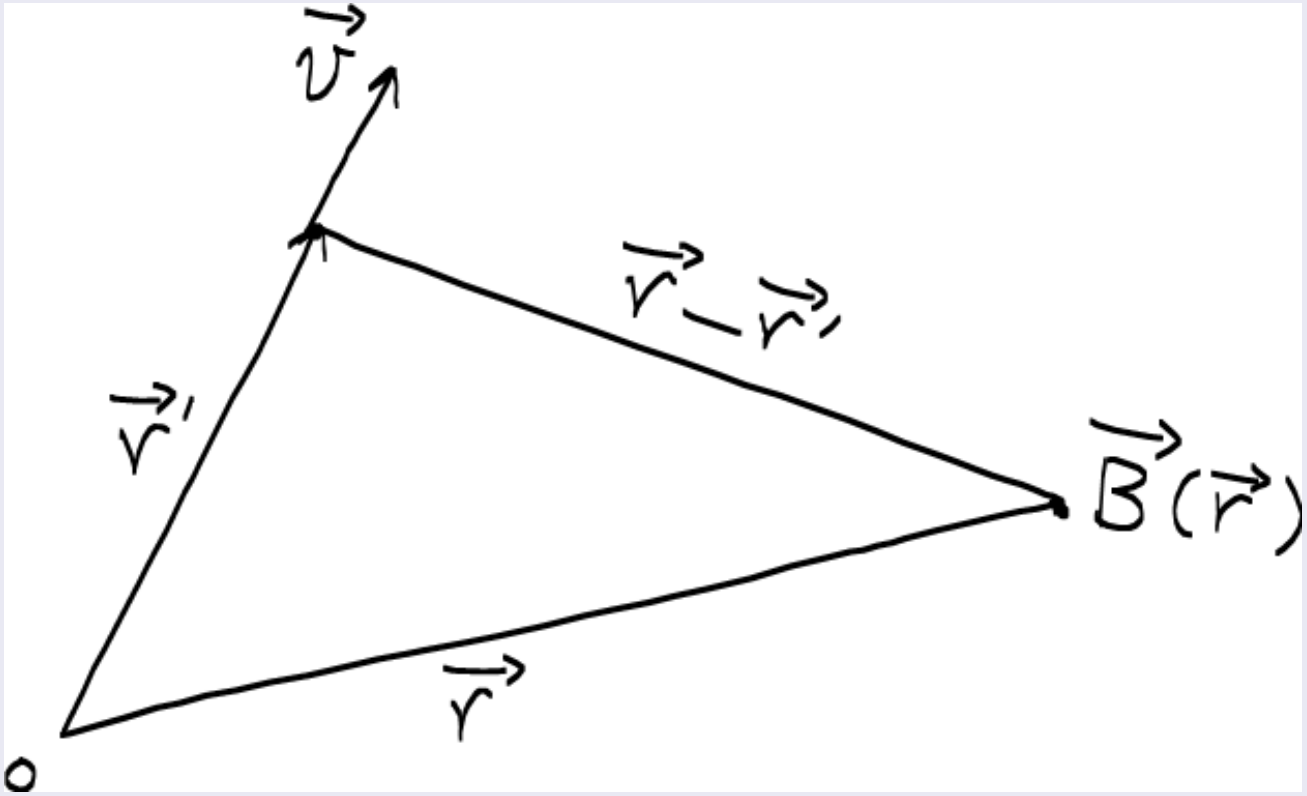
3. Remarquons que $n\, dV$ est le nombre de porteurs de charge dans le volume dV. C'est ainsi que $d\vec{B}(M)$ est le champ magnétique créé par $n\, dV$ charges électriques, alors que celui créé par une seule charge q de vitesse moyenne $\vec{v}$ en M est donné par :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{\mathrm{v}} \wedge \overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PM}|^3}$$

4. Le champ magnétique $\vec{B}(M)$ est perpendiculaire à la fois au vecteur vitesse de la charge électrique $\vec{\mathrm{v}}$ et au vecteur reliant la position de la charge P et le point de mesure M.

5. Dans le cas général, le champ magnétique créé au point $\vec{r}$ par une charge électrique q en mouvement (avec une vitesse $\vec{\mathrm{v}}$ et repérée par le vecteur $\vec{r'}$) est donné par :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{\mathrm{v}} \wedge (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}$$



Analogie avec champ électrique

1. Les expressions du champ magnétique créé par une charge q se déplaçant à une vitesse v et un champ électrostatique créé par une charge électrique q ont une certaine analogie pertinente. En effet

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(\vec{r}-\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3} \quad , \quad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{\mathrm{v}}\wedge(\vec{r}-\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}$$

   En effet, le champ électrostatique $\vec{E}(\vec{r})$ est radial, c'est à dire porté par le vecteur $\vec{r}-\vec{r'}$ reliant la position de la charge q et le point de mesure du champ, alors que le champ magnétique $\vec{B}(\vec{r})$ est perpendiculaire à $\vec{r}-\vec{r'}$.
2. D'autre part, c'est le produit $q(\vec{r}-\vec{r'})$ qui apparait dans l'expression de $\vec{E}(\vec{r})$, alors que dans l'expression de $\vec{B}(\vec{r})$ apparait le produit vectoriel $q\vec{\mathrm{v}}\wedge(\vec{r}-\vec{r'})$.
3. Dans les deux expressions apparait au dénominateur le même terme $|\vec{r}-\vec{r'}|^3$.

4. Le coefficient de proportionnalité pour $\vec{E}(\vec{r})$ est $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ et $\dfrac{\mu_0}{4\pi}$ pour $\vec{B}(\vec{r})$.
5. Le champ magnétique est un pseudo-vectoriel car sa direction est définie par la convention du produit vectoriel (direction qui n'a pas de sens physique !)

Principe de superposition

1. Un ensemble de N charges électriques q_i en mouvement avec des vitesses $\vec{\mathrm{v}}$ créent en un point $\vec{r}$ un champ magnétique

$$\vec{B}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_i \vec{\mathrm{v}}_i \wedge (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

2. Dans le cas continu, on considère une charge dq contenue dans un volume infinitésimal de charges électriques dV centré en $\vec{r'}$ et animée par une vitesse moyenne $\vec{\mathrm{v}}(\vec{r'})$. Le champ magnétique créé par l'ensemble de charges électriques dans un volume donné s'écrit comme :

$$\vec{B}(\vec{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{dq \vec{\mathrm{v}}(\vec{r'}) \wedge (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} dV$$

3. Mais on sait que $dq = n\, e dV$ où e est la charge élémentaire et $\vec{\mathrm{J}}(\vec{r}) = n\, e\, \vec{\mathrm{v}}(\vec{r'})$ la densité du courant électrique au point $\vec{r'}$.

Principe de superposition

4. En remplaçant dans l'expression ci-dessus on trouve

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{\mathrm{J}}(\vec{r'}) \wedge (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} dV$$

   Ce résultat est valable quelle que soit la forme du conducteur. Elle peut ainsi être appliquée à l'intérieur d'un matériau de volume V quelconque.

5. Faites la comparaison entre l'expression de $\vec{B}(\vec{r})$ est celle du champ électrostatique produit par une densité volumique de charges électriques donnée par :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r'})(\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} dV$$

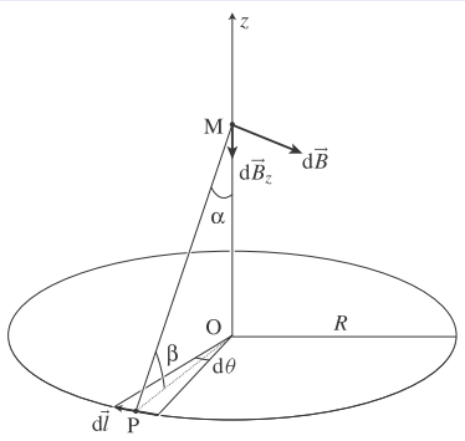
Techniques mnémoniques pour la définition de la direction du champ magnétique

1. On utilise la règle du bonhomme d'Ampère selon laquelle un observateur disposé le long du conducteur de telle façon que le courant électrique circule de ses pieds vers sa tête voit le champ magnétique en un point dirigé de sa droite vers sa gauche.
2. On peut aussi utiliser la règle de la main droite selon laquelle le courant électrique circule le long du pouce alors que le champ magnétique est dans la direction selon laquelle on plie la paume.

Champ magnétique créé par une boucle circulaire (spire) parcourue par un courant électrique continu

1. Considérons le cas d'une boucle circulaire de rayon R parcourue par un courant électrique I et calculons le champ magnétique en un point M situé sur l'axe des z perpendiculaire à la boucle et passant par son centre O.
2. On utilise le système de coordonnées cylindriques dans lequel un élément de déplacement sur la boucle s'écrit comme :

$$d\vec{\ell} = d\ell\vec{u}_\theta$$



D'autre part, le champ magnétique en un point sur l'axe des z est perpendiculaire à $d\vec{\ell}$. Il a donc seulement deux composantes, une suivant $\vec{u}_\rho$ et l'autre suivant $\vec{u}_z$, à savoir

$$\vec{B}(M) = B_\rho \vec{u}_\rho + B_z \vec{u}_z$$

On dit que le champ magnétique est poloïdal.

3. En effet, l'élément $d\vec{\ell}$ crée en M un champ magnétique :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{I}d\vec{\ell}\wedge\overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PM}|^3}$$

avec

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = OM\vec{u}_z - R\vec{u}_\rho$$

Ce qui donne

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0\mathrm{I}}{4\pi|\overrightarrow{PM}|^3}d\ell\vec{u}_\theta\wedge(OM\vec{u}_z - R\vec{u}_\rho)$$

D'autre part, on sait que

$$\vec{u}_\theta\wedge\vec{u}_z = \vec{u}_\rho \quad , \quad \vec{u}_\theta\wedge\vec{u}_\rho = -\vec{u}_z$$

et

$$OM = z \quad , \quad |\overrightarrow{PM}| = \sqrt{z^2+R^2} \quad , \quad d\ell = Rd\theta$$

4. Ce qui donne

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{4\pi(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\left[z\,R\,d\theta\vec{u}_\rho + R^2 d\theta\vec{u}_z\right]$$

Le champ magnétique en M est la contribution de tous les éléments de courant électrique sur la boucle. Il est donc obtenu en intégrant l'expression ci-dessus par rapport à θ de 0 à 2π :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{4\pi(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\left[z\,R\int_0^{2\pi} d\theta\vec{u}_\rho - R^2\int_0^{2\pi} d\theta\vec{u}_z\right]$$

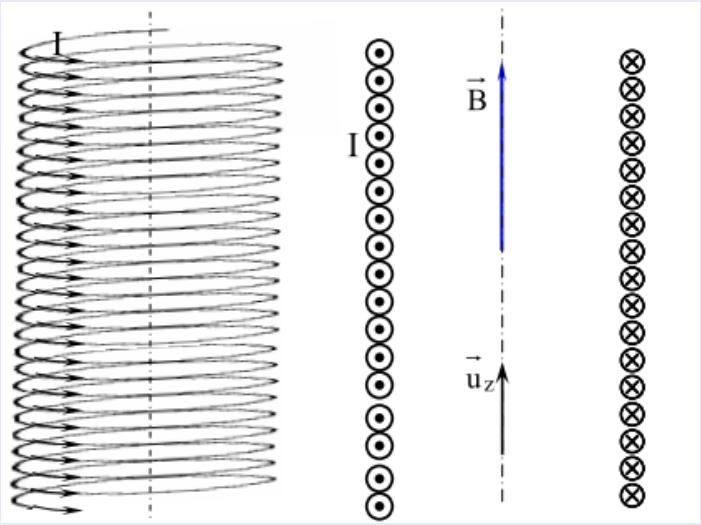
5. Remarquons que le vecteur $\int_0^{2\pi} d\theta\vec{u}_\rho$ est nul car c'est la résultante d'une somme continue de vecteurs de même composante mais de directions qui s'annulent mutuellement en faisant le tour du cercle complet.

6. Par contre, les contributions des éléments $d\vec{\ell}$ selon l'axe des z s'ajoutent, ce qui donne finalement l'expression du champ magnétique créé en un point z par une boucle de rayon R parcourue par un courant électrique continue I sous la forme :

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{u}_z$$

Cas d'un solenoide infini(sur l'axe) :

1. Un solénoïde est constitué d'un enroulement d'un fil conducteur autour d'un cylindre (les spires ne se touchent pas car recouvertes d'une matière isolante). On suppose que ce fil est suffisamment mince pour pouvoir modéliser ce solénoïde comme une juxtaposition de spires coaxiales, avec n spires par unité de longueur. Chaque spire est parcourue par le même courant permanent (continu) I.



2. Dans ce cas, un élément de courant égal à $n\,dz\mathrm{I}d\vec{\ell}$ (le produit de $\mathrm{I}d\vec{\ell}$ par le nombre de spire selon z : $n\,dz$) crée en un point z sur l'axe du cylindre un élément de champ magnétique égal à

$$d\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{n\,dz\mathrm{I}d\vec{\ell}\wedge\overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PM}|^3}$$

ou encore (en utilisant le résultat obtenu pour une boucle) :

$$d^2\vec{B}(z) = \frac{\mu_0\mathrm{I}}{4\pi}\frac{R^2\,n\,dzd\theta}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{u}_z$$

3. Le champ magnétique créé en un point z sur l'axe du cylindre par un solenoide supposé infini est obtenu par l'intégration de l'expression ci-dessus par rapport à θ de 0 à 2π et z de $-\infty$ à ∞ :

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \mathrm{I} n\, R^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{u}_z = \frac{\mu_0 \mathrm{I} n\, R^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{u}_z$$

4. On utilise le changement de variable suivant :

$$z = R \tan t \qquad \text{avec} \qquad dz = \frac{R\, dt}{\cos^2 t}$$

Après calcul simple, on aura

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{R^2}\left[\frac{z}{R^2+z^2}\right] = \frac{2}{R^2}$$

4. Ce qui donne enfin

$$\vec{B}(z) = n\mu_0 \mathrm{I} \vec{u}_z$$

Théorème d'Ampère

1. Reprenons le résultat donnant l'expression du champ magnétique créé par un fil conducteur parcouru par un courant électrique continu en un point M dans l'espace, à savoir :

$$B(M) = \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{2\pi R}$$

   dont la sens est perpendiculaire au plan contenant le fil conducteur et le point de mesure M.

2. Calculons la circulation de ce champ magnétique le long d'un cercle de Rayon R dont l'origine est un point du fil, lequel est perpendiculaire au cercle. Dans le système de coordonnées cylindrique le champ magnétique sur le cercle est donné par :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{2\pi R} \vec{u}_\theta$$

Théorème d'Ampère

3. Un élément de circulation est donné par

$$d\vec{\ell} = R\, d\theta \vec{u}_\theta$$

4. La circulation du champ magnétique est donnée le long du cercle est donnée par

$$\oint \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{2\pi R} \vec{u}_\theta \cdot R\, d\theta \vec{u}_\theta = \mu_0 \mathrm{I}$$

La circulation du champ magnétique le long d'un cercle fermé à travers lequel passe un courant électrique continu I ne dépend pas du rayon du cercle, mais seulement du courant électrique I passant à travers.

Énoncé du théorème d'Ampère

5. Le théorème d'Ampère généralise ce résultat pour un cas d'un contour régulier. En effet, selon le théorème d'Ampère :
   La circulation du champ magnétique le long d'une courbe C quelconque, orientée et fermée, appelée contour d'Ampère, est égale à μ_0 fois la somme algébrique des courants électriques qui traversent la surface délimitée par C :

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \mathrm{I}_{int}$$

6. Cette relation fondamentale est l'équivalent du théorème de Gauss pour le champ électrostatique, car elle relie le champ magnétique à ses sources, à savoir le courant permanent.
7. Cette relation n'est valable que pour des courants électriques continus (régime permanent).

Démonstration du théorème d'Ampère

1. Il s'agit de calculer la circulation du champ magnétique le long d'un contour fermé créé par un courant permanent I le long d'un autre contour fermé.
2. On sait déjà que le champ magnétique créé en un point M par un courant permanent I circulant le long d'un contour C_2 est donné par :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_2 \wedge \overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PM}|^3}$$

3. La circulation du champ magnétique $\vec{B}$ le long d'un contour fermé C_1 est donné par :

$$\oint_{C_1} \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell}_1 = \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{4\pi} \oint_{C_1} \left(\oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_2 \wedge \overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PM}|^3} \right) \cdot d\vec{\ell}_1$$

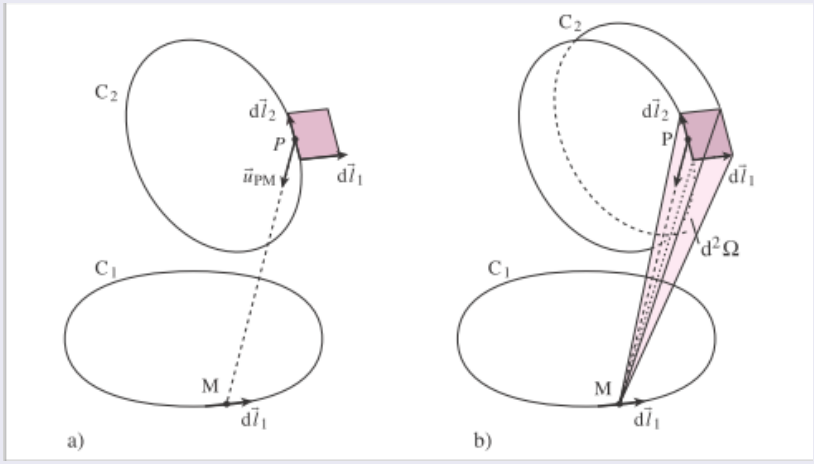
4. En utilisant une propriété du calcul vectoriel

$$(d\vec{\ell}_2 \wedge \overrightarrow{PM}) \cdot d\vec{\ell}_1 = (d\vec{\ell}_1 \wedge d\vec{\ell}_2) \cdot \overrightarrow{PM}$$

et

$$\frac{\overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PM}|^3} = \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2}$$

où $\vec{u}_{PM}$ est le vecteur unité porté par $\overrightarrow{PM}$.



5. On obtient donc

$$\oint_{C_1} \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell_1} = \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell_1} \wedge d\vec{\ell_2}}{PM^2} \vec{u}_{PM}$$

6. Remarquons que $d\vec{\ell_1} \wedge d\vec{\ell_2}$ n'est rien que l'élément de surface $d^2\vec{S} = d\vec{\ell_1} \wedge d\vec{\ell_2}$ (pour se faire, on fait une translation du vecteur $d\vec{\ell_1}$ pour faire coïncider son point d'action avec celui de $d\vec{\ell_2}$).

7. On voit aussi sur la figure que

$$\frac{d\vec{\ell}_1 \wedge d\vec{\ell}_2}{PM^2}\vec{u}_{PM}$$

n'est autre que l'angle solide sous lequel un observateur en M voit l'élément de surface $d^2\vec{S}$.

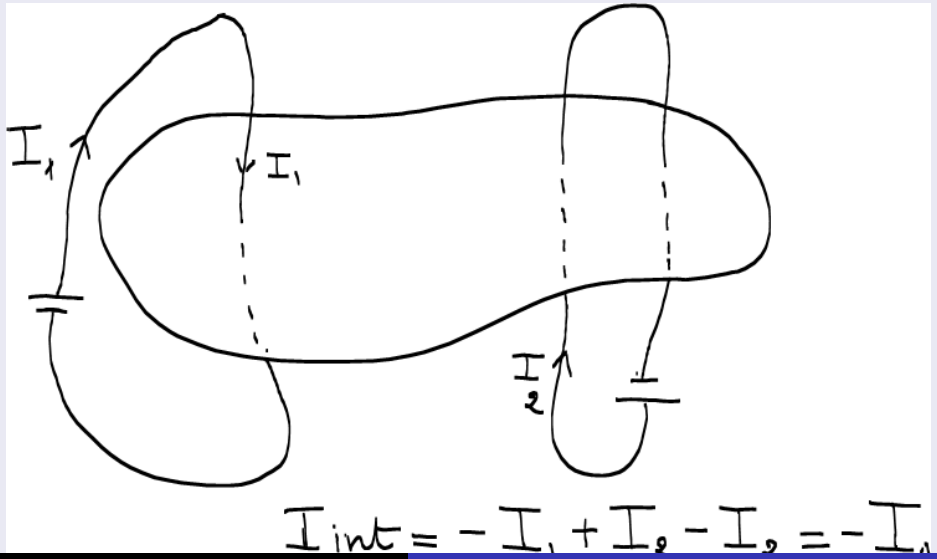
8. Dans le cas où le courant permanent I passe à travers la surface du contour C_1, l'intégrale

$$\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\vec{\ell}_1 \wedge d\vec{\ell}_2}{PM^2}\vec{u}_{PM} = \int d\Omega = 4\pi$$

Ce qui donne enfin

$$\oint_{C_1}\vec{B}(M)\cdot d\vec{\ell}_1 = \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{4\pi}4\pi = \mu_0 \mathrm{I}_{int}$$

8. Si les deux contours C_1 et C_2 ne sont pas entrelacés (ne se croisent pas), l'angle solide est nul.
9. Chaque fois que les deux contours s'entrelacent l'angle solide est égal à $\pm 4\pi$. En effet, le signe plus correspond au cas où le courant dans C_2 traverse la surface délimitée par le contour C_1 dans le sens de son orientation, le signe moins au cas contraire
10. Le courant I_{int} est la somme algébrique des courants à travers la surface délimitée par le contour C_1. De ce fait, on doit compter positif ou négatif les courants électriques selon que le croisement est dans un sens ou dans un autre.



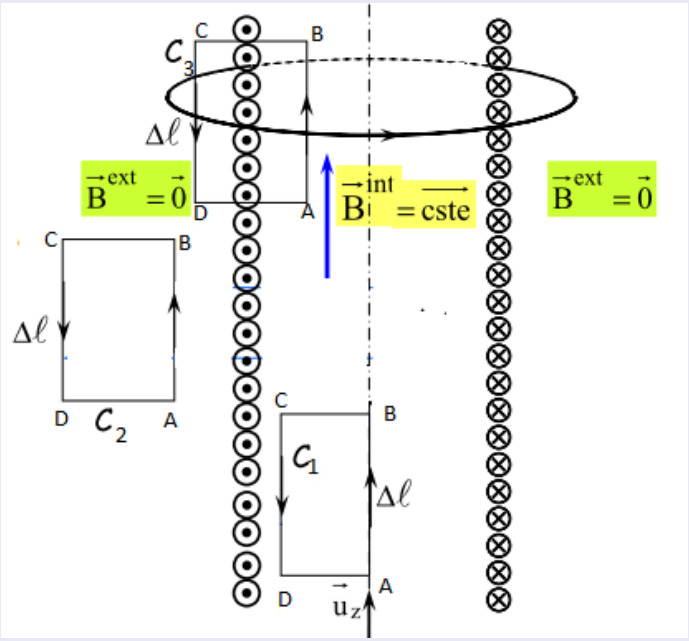
Application du théorème d'Ampère au cas d'un solénoïde infini

8. Considérons un solénoïde infini composé de n spires par unité de longueur, parcouru par un courant permanent I. Étant donnée la géométrie du solénoïde, on adopte le système de coordonnées cylindriques avec l'axe z le long de l'axe du cylindre formé par le solénoïde.
9. La densité du courant électrique est suivant la direction $\vec{u}_\theta$, à savoir
$$\vec{\mathrm{J}}(\rho, \theta, z) = \mathrm{J}(\rho)\vec{u}_\theta$$
.
10. Puisque le vecteur densité de courant $\vec{\mathrm{J}}$ est suivant $\vec{u}_\theta$, le champ magnétique produit doit être perpendiculaire à $\vec{u}_\theta$.
11. Sur l'axe du solénoïde le champ magnétique créé par un courant continu parcourant celui-ci est suivant $\vec{u}_z$ (voir résultat précédent).

Application du théorème d'Ampère au cas d'un solénoïde infini

12. En un point quelconque à l'intérieur du solénoïde le vecteur champ magnétique est aussi dirigé suivant l'axe des z. En effet, il est facile de vérifier que la plan $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie pour le champ magnétique ; c'est à dire qu'à un élément de courant à une distance z de ce plan créant un champ magnétique en un point sur ce plan on peut toujours trouver un autre élément de courant en $-z$ du plan qui créé sur le même plan un champ magnétique tel que la somme des deux vecteurs est suivant z.
13. D'autre part, le plan $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_z)$ est aussi un plan de symétrie par rapport au champ magnétique. Cela veut dire que le champ magnétique ne peut pas avoir une composante suivant $\vec{u}_\theta$. Par conséquent, on a
$$\vec{B}(\rho, \theta, z) = B(\rho)\vec{u}_z$$
.

14. On applique le théorème d'Ampère sur trois contours fermés différents : C_1 un contour rectangulaire de longueur $\Delta\ell$ situé entièrement à l'intérieur du solénoïde, C_2 entièrement à l'extérieur et C_3 " à cheval" sur les spires.



Contour 1

1. La circulation du champ magnétique le long du contour fermé $ABCDA$ est nul car aucun courant électrique ne passe à travers la surface délimitée par ce contour (le contour étant à l'intérieur du solénoïde) :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

2. Les circulations du champ magnétique le long des tronçons BC et DA sont nulles car le champ magnétique y est perpendiculaire (il a une seule composante suivant z)

$$\int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Contour 1

3. Il nous reste donc

$$\int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Prenons ces droites de longueurs très petites $AB = CD = \ell$ de telle façon que le champ magnétique y est constant. On peut donc écrire

$$\vec{B} \cdot \overrightarrow{AB} + \vec{B} \cdot \overrightarrow{CD} = B_{AB}\ell - B_{CD}\ell = 0$$

ou encore

$$B_{AB} = B_{CD}$$

Le champ magnétique est le même en tout point à l'intérieur du solénoïde (uniforme) : il ne dépend ni de ρ ni de θ ni de z. uniforme et ne dépend

Contour 2

1. Puisque aucun courant ne passe à travers la surface de ce contour, on obtient :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Le champ magnétique doit être le même en tout point à l'extérieur du solénoïde (même en un point très éloigné du solénoïde) ; mais puisque le champ magnétique en un point très éloigné de la source doit être nul, on conclut qu'il doit être aussi nul au voisinage du solénoïde.

Contour 3

1. Pour le contour 3 on a :

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \vec{B}\cdot d\vec{\ell} + \int_B^C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \vec{B}\cdot d\vec{\ell} + \int_D^A \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = +n\ell\mu_0 \mathrm{I}$$

   Car le nombre de spires qui passent à travers la surface de ce contour est $n\ell$, donc $n\ell\mathrm{I}$ passent à travers. Le signe plus indique que, selon la convention, le courant I sortant de la page est compté positivement.

2. La circulation

$$\int_C^D \vec{B}\cdot d\vec{\ell}$$

   est nulle car le champ $\vec{B}$ y est nul.

Contour 3

3. Aussi, les circulations

$$\int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^D \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

car le champ $\vec{B}$ est perpendiculaire au contour dans la partie à l'intérieur du solénoïde et nul sur la partie à l'extérieur du solénoïde.

4. Il nous reste juste la circulation

$$\int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = n\ell\mu_0 \mathrm{I}$$

Contour 3

5. On choisit un droite $AB = \ell$ très petite de telle sorte que le champ magnétique y est constant. On peut écrire :

$$\int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \vec{B} \cdot \overrightarrow{AB} = B_z(\rho)\vec{u}_z \cdot \ell(\vec{u}_z) = \ell B_z(\rho) = n\ell\mu_0 \mathrm{I}$$

ou encore

$$B_z(\rho) = n\mu_0 \mathrm{I}$$

6. Finalement, le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde est donnée par :

$$\vec{B} = n\mu_0 \mathrm{I}\vec{u}_z$$

alors qu'il est nul à l'extérieur du solénoïde.

Forme locale du théorème d'Ampère

1. Le théorème d'Ampère s'écrit

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \mathrm{I}_{int} = \mu_0 \iint \vec{\mathrm{J}} \cdot d\vec{S}$$

2. En utilisant le théorème de Stokes, on peut écrire

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \vec{\nabla} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

où S est la surface délimitant le contour fermé C. Ce qui donne

$$\iint_S \vec{\nabla} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint \vec{\mathrm{J}} \cdot d\vec{S}$$

ou encore

$$\iint_S \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \mu_0 \vec{\mathrm{J}}\right) \cdot d\vec{S} = 0$$

Forme locale du théorème d'Ampère

3. Ceci est valable pour une surface arbitraire, ce qui permet d'écrire le théorème d'Ampère sous sa forme locale :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \mu_0 \vec{\mathrm{J}} = 0$$

ou encore

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{\mathrm{J}}$$

Le rotationnel du champ magnétique $\vec{B}$ est égal à $\mu_0 \vec{\mathrm{J}}$ où passe un courant électrique, alors qu'il est nul en un point ou aucun courant électrique y passe (hors du fil conducteur).

4. A comparer cette relation avec celle qui correspond au champ électrostatique, à savoir :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}$$

Flux du champ magnétique $\vec{B}$:

1. Calculons la divergence du champ magnétique $\vec{B}$ créé par une charge électrique q se déplaçant à une vitesse constante $\vec{\mathrm{v}}$. En effet

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{\mathrm{v}}(\vec{r'}) \wedge (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \right)$$

2. L'analyse vectorielle nous renseigne sur le fait que :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{\mathrm{v}}(\vec{r'}) \wedge (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \right) = \frac{(\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathrm{v}}(\vec{r'})) - \vec{\mathrm{v}}(\vec{r'}) \cdot \vec{\nabla} \wedge \frac{(\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}$$

Flux du champ magnétique $\vec{B}$:

3. Mais il est évident que

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \wedge \vec{v}(\vec{r'}) = \vec{0}$$

car on dérive par rapport aux coordonnées du vecteur $\vec{r}$ alors que la vitesse dépend de la position de la charge électrique q qui, elle, est repérée par le vecteur $\vec{r'}$.

4. D'autre part, il est facile de vérifier que

$$\frac{(\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} = -\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|}\right)$$

Alors qu'on sait bien que le rotationnel d'un gradient est toujours nul, d'où

$$\vec{\nabla} \wedge \frac{(\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} = -\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|}\right)\right) = \vec{0}$$

Flux du champ magnétique $\vec{B}$:

5. Ce qui donne enfin
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$
Ce résultat est très important car il est valable pour tous les cas du champ $\vec{B}$: la divergence du champ magnétique en tout point est toujours nulle.
6. D'une façon général, cela nous amène à confirmer que le flux du champ magnétique à travers une surface fermée est toujours nul. En effet, le théorème de divergence nous permet d'écrire
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV$$
mais puisque $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ est nulle en tout point du volume considéré, on obtient
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

5. A comparer avec le flux d'un champ électrostatique à travers une surface fermée

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon}$$

ou encore

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon}$$

Explication

En effet, si la charge électrique contenue dans une surface fermée était positive, le flux de $\vec{E}$ à travers celle-ci serait positif (sortant), et si la charge électrique était négative, le flux serait négatif (rentrant). Alors que rien de tout cela n'a été observé pour un champ magnétique. En fait, on ne connait, pour l'instant, aucune charge magnétique analogue à la charge électrique : tout le champ magnétique $\vec{B}$ qui rentre à travers une surface fermée doit (toujours) en ressortir !

Explication

Cela est dû au fait que la source de champ magnétique la plus élémentaire est un dipôle (deux polarités), comme un aimant dont on ne peut pas dissocier le pôle nord et le pôle sud.

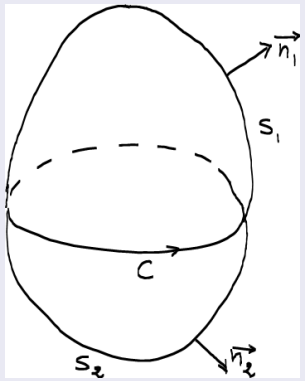
Propriétés du champ magnétique $\vec{B}$:

Considérons deux surfaces S_1 et S_2 s'appuyant sur le même contour C de telle façon à former une surface fermée $S = S_1 + S_2$. On sait d'après le résultat précédent que le flux à travers cette surface fermée est nul :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

ce qui donne

$$\iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$



Propriétés du champ magnétique $\vec{B}$:

Maintenant, si au lieu de S_2 on prend une surface S_3 différente de S_2 mais qui s'appuie sur le même contour C de telle façon que $S_1 + S_3$ donne aussi une surface fermée, avec toujours

$$\iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_3} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

ou encore

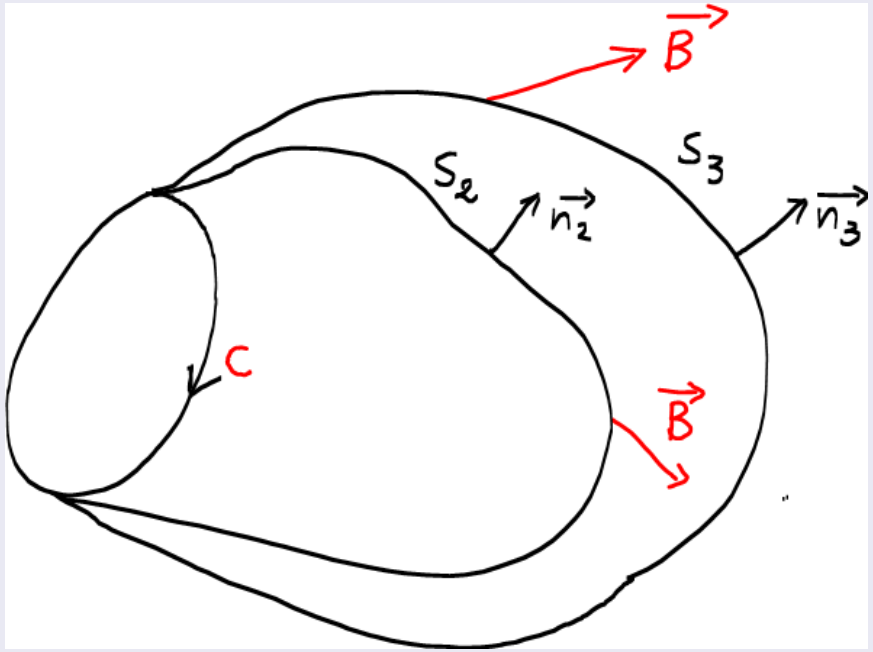
$$\iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\iint_{S_3} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Ce qui nous permet de déduire que le flux à travers les deux surfaces S_2 et S_3 est le même bien que celles-ci soient de formes différentes, mais qu'elles s'appuient sur le même contour C :

$$\iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_3} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Propriétés du champ magnétique $\vec{B}$:

Le flux du champ magnétique à travers une surface (non fermée) ne change pas si on change la forme de celle-ci tout en gardant le même contour sur lequel s'appuient les deux surfaces. On dit que le champ magnétique a un flux conservatif.



Lignes de champ magnétique

Les lignes de champ magnétique appelées aussi lignes de force sont expérimentalement tracées par la matière sensible au champ magnétique, telle que la limaille de fer déposée au voisinage d'un aimant. Elles sont définies comme des courbes dans l'espace telle sur lesquelles le champ magnétique y est tangent. Elles sont obtenues par la relation :

$$\vec{B} \wedge d\vec{\ell} = \vec{0}$$

où $d\vec{\ell}$ est un élément infinitésimal le long de la ligne de champ considérée. La conservation du flux magnétique implique que les lignes de champ magnétique se referment toujours sur elles mêmes ! C'est le cas par exemple du champ magnétique créé par un fil conducteur parcouru par un courant électrique.

Tubes de flux

Un tube de flux magnétique est une sorte de “rassemblement” de lignes de champ, tout au long duquel le flux magnétique est conservé. Le champ magnétique $\vec{B}$ est parallèle à la surface du tube (en tout point). C'est l'exemple d'un tube de flux magnétique du champ $\vec{B}$ créé par un fil conducteur infini parcouru par un courant électrique permanent ; où le flux entrant est égal au flux sortant !

Potentiel vecteur $\vec{A}$

1. Reprenons le résultat précédent concernant la divergence du champ magnétique, à savoir :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Or nous savons que la divergence du rotationnel d'un vecteur quelconque est toujours nulle. Cela nous permet de supposer que le champ magnétique $\vec{B}$ puisse s'écrire comme le résultat de l'application de l'opérateur "rotationnel" sur un vecteur $\vec{A}$ "quelconque"

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

puisque

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0$$

Potentiel vecteur $\vec{A}$

2. Le vecteur $\vec{A}$ est défini comme le potentiel vecteur associé au champ magnétique $\vec{B}$ au même titre que le potentiel scalaire V est associé au champ électrostatique $\vec{E}$ selon la relation

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

3. Le potentiel vecteur $\vec{A}$ est donc introduit, comme c'était le cas du potentiel V, pour simplifier le calcul du champ magnétique $\vec{B}$.

Propriétés du potentiel vecteur $\vec{A}$

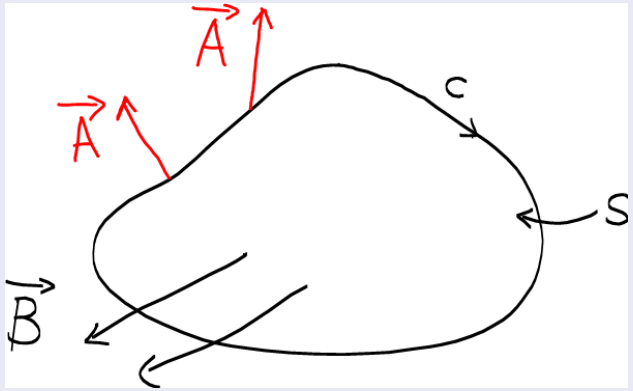
1. Calculons le flux du champ magnétique $\vec{B}$ à travers une surface (non fermée) S :

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Mais selon le théorème de Stokes, il est possible d'écrire

$$\iint_S \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

où C est le contour sur lequel s'appuie la surface S.



Ce résultat confirme le fait que le flux du champ magnétique à travers une surface ne dépend que du contour sur lequel s'appuie cette surface. La grandeur physique qu'on peut donc utiliser est bien le potentiel vecteur.

Propriétés du potentiel vecteur $\vec{A}$

2. Comme on a la liberté de choisir le potentiel vecteur $\vec{A}$, il est intéressant de remarquer que si on choisissais

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f \qquad \text{f doit être dérivable}$$

d'où

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}' = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} + \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} f = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

car

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} f = 0$$

$\vec{A}'$ et $\vec{A}$ donnent le même champ magnétique $\vec{B}$. On dit donc que le champ $\vec{A}$ est défini à un vecteur gradient prés, comme le potentiel scalaire V est défini à une constante prés.

Pour éviter cette indétermination intrinsèque du potentiel vecteur, il est souvent commode d'imposer (de façon artificielle) une contrainte supplémentaire sur le potentiel vecteur pour en sélectionner une configuration parmi les solutions physiquement équivalentes qui sont possibles. On parle dans ce cas d'un choix de jauge.

Exemple

On peut par exemple rajouter une condition sur la forme du potentiel vecteur $\vec{A}$ telle que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \qquad \text{Jauge de Coulomb}$$

En utilisant la forme locale du théorème d'Ampère

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{\mathrm{J}}$$

et

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

avec

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

Exemple

Mais comme

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

, on aura

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = -\Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{\mathrm{J}}$$

ou encore

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{\mathrm{J}}$$

Cette relation relie le potentiel vecteur à sa source, le courant électrique. A comparer avec l'équation de Poisson pour le potentiel électrostatique

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Expression du potentiel vectoriel

On part de l'expression de Biot et Savart pour le champ magnétique

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{\mathrm{J}}(\vec{r'}) \wedge (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} dV$$

mais on sait que

$$\frac{(\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} = -\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|}\right)$$

Ce qui permet d'écrire

$$\frac{\vec{\mathrm{J}}(\vec{r'}) \wedge (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} = -\vec{\mathrm{J}}(\vec{r'}) \wedge \vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|}\right)$$

Expression du potentiel vectoriel

En effet

$$\vec{\mathrm{J}}(\vec{r'})\wedge\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\right)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \mathrm{J}_x(\vec{r'}) & \mathrm{J}_y(\vec{r'}) & \mathrm{J}_z(\vec{r'}) \\ \dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\right)}{\partial x} & \dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\right)}{\partial y} & \dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\right)}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

La composante suivant x de ce vecteur est égal à

$$\mathrm{J}_y(\vec{r'})\frac{\partial\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\right)}{\partial z}-\mathrm{J}_z(\vec{r'})\frac{\partial\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\right)}{\partial y}$$

qui peut s'écrire aussi

$$\frac{\partial\left(\frac{\mathrm{J}_y(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\right)}{\partial z}-\frac{\partial\left(\frac{\mathrm{J}_z(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\right)}{\partial y}$$

puisque les composantes du vecteur $\vec{\mathrm{J}}(\vec{r'})$

$$\mathrm{J}_y(\vec{r'}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{J}_z(\vec{r'})$$

ne sont pas affectés par la dérivation par rapport à y et z (elles sont définies en $\vec{r'}$ et non pas en $\vec{r}$)

Cela nous permet d'écrire

$$\vec{\mathrm{J}}(\vec{r'})\wedge\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{\mathrm{J}_x(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|} & \dfrac{\mathrm{J}_y(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|} & \dfrac{\mathrm{J}_z(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\end{vmatrix}=-\vec{\nabla}\wedge\frac{\vec{\mathrm{J}}(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}.$$

Il est maintenant possible d'écrire

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \vec{\nabla}_{\vec{r}} \wedge \frac{\vec{\mathrm{J}}(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} dV'$$

Mais puisque la dérivation à l'intérieur de l'intégrale se fait par rapport à r, il est possible de sortir le rotationnel de l'intégrale :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla}_{\vec{r}} \wedge \left(\iiint_{V'} \frac{\vec{\mathrm{J}}(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} dV' \right)$$

Par identification avec

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla}_{\vec{r}} \wedge \vec{A}(\vec{r})$$

On obtient donc l'expression du potentiel vecteur créé par une densité de courant permanent :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{\mathrm{J}}(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} dV'$$

Cette expression est relativement simple à calculer que celle qui donne directement le champ magnétique $\vec{B}(\vec{r})$.

Pour un fil conducteur parcouru par un courant permanent I, le potentiel vectoriel devient

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_c \left(\iint_{S'} \frac{\vec{\mathrm{J}}(\vec{r'}) d\vec{S}'}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \right) d\vec{r'} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_c \frac{\mathrm{I}}{|\vec{r} - \vec{r'}|} d\vec{r'}$$

ou encore

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{4\pi} \oint_c \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

car

$$\mathrm{I} = \iint \vec{\mathrm{J}}(\vec{r}')d\vec{S}'$$

Action d'un champ magnétique sur le mouvement d'une charge électrique en mouvement

En 1821, un certain H. Davy remarqua que si on approchait un gros aimant d'un arc voltaïque (des charges électriques négatives qui, à l'aide d'une grosse tension, sont arrachées de l'électrode négative, sous une très basse pression donnant naissance à un courant électrique circulant dans l'air, entre deux tiges carbone), ce dernier déviait sous l'effet du champ magnétique de l'aimant, comme c'était le cas d'un fil conducteur. En effet, les particules électrisées de l'arc subissaient une force perpendiculaire à la fois à la direction de leur déplacement et aux lignes du champ magnétique. Ces travaux ont mené à penser que le courant électrique dans le conducteur était le résultat d'un déplacement des charges électriques du conducteur.

Historique

A la fin du dix-neuvième siècle, le physicien hollandais Hendrik Lorentz avança une théorie selon laquelle le courant électrique dans un conducteur est d'autant plus grand si le nombre de charges électriques était grand ou si leurs vitesses étaient grandes. Il en déduit que la force magnétique '$\vec{F}$ appliquée sur un charge électrique en mouvement était proportionnelle à sa vitesse $\vec{\mathrm{v}}$.

Historique

Ce qui l'amena, en 1895, à établir l'expression de la force $\vec{F}$ qui s'exerce sur une charge électrique ponctuelle q, se déplaçant à la vitesse $\vec{\mathrm{v}}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$ comme :

$$\vec{F} = q\left(\vec{\mathrm{v}} \wedge \vec{B}\right)$$

Remarque

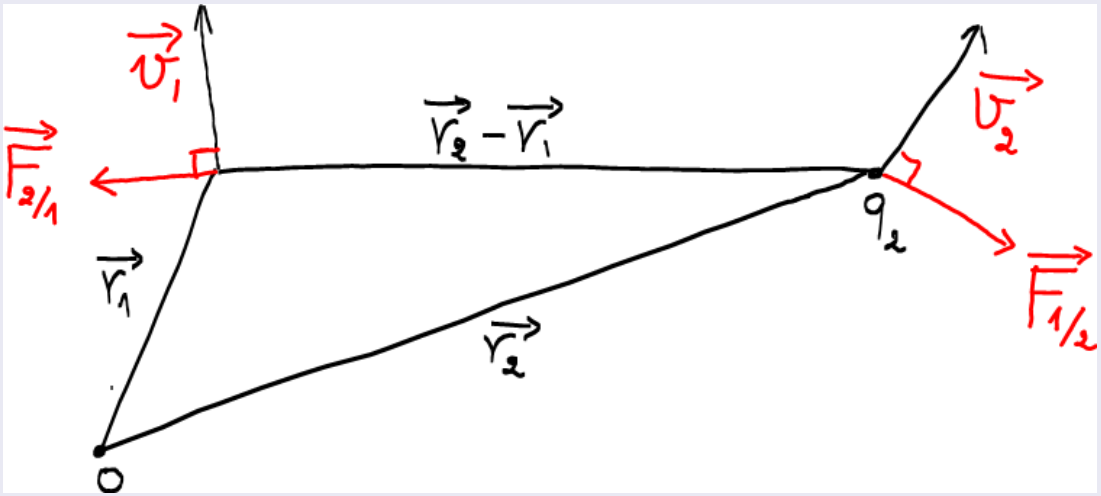
En présence d'un champ électrique $\vec{E}$ la même charge est soumise à une force $\vec{F}$ égale à

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{\mathrm{v}} \wedge \vec{B}\right)$$

De par cette définition de la force appliquée sur une charge q par un champ magnétique, il est impossible pour un champ magnétique $\vec{B}$ de faire déplacer une charge électrique à partir du repos ! Le champ électrique, par contre, peut le faire.

Considérons maintenant deux charges électriques q_1 et q_2 animées de deux vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ respectivement. La charge électrique q_1, en $\vec{r}_1$, crée en un point $\vec{r}$ un champ magnétique

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} q_1 \vec{v}_1 \wedge \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}$$



Selon l'expression de la force de Lorentz, cette même charge électrique q_1 applique une force $\vec{F}_{1/2}$ sur la charge q_2, elle même se déplaçant à une vitesse $\vec{\mathrm{v}}_2$, égale à

$$\vec{F}_{1/2} = q_2 \left(\vec{\mathrm{v}}_2 \wedge \vec{B}_1(\vec{r}_2) \right) = q_2 \vec{\mathrm{v}}_2 \left(\frac{\mu_0}{4\pi} q_1 \vec{\mathrm{v}}_1 \wedge \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \right)$$

ou encore

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \vec{\mathrm{v}}_2 \wedge (\vec{\mathrm{v}}_1 \wedge (\vec{r}_2 - \vec{r}_1))$$

avec

$$\vec{\mathrm{v}}_1 = \frac{\vec{r}_1}{dt} \qquad \text{et} \qquad \vec{\mathrm{v}}_2 = \frac{\vec{r}_2}{dt}$$

Le force magnétique n'est pas radiale

Remarquons que le vecteur $\vec{v}_1 \wedge (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ est perpendiculaire à la page (entrant), alors que le vecteur $\vec{v}_2 \wedge (\vec{v}_1 \wedge (\vec{r}_2 - \vec{r}_1))$ est dans le plan de la page perpendiculairement au vecteur $\vec{v}_1$. Cela montre que, contrairement à la force électrique radiale appliquée par ue charge électrique q_1 sur une charge électrique q_2 (les deux immobiles), la force magnétique appliquée par une charge électrique en mouvement sur une autre charge électrique en mouvement n'est pas radiale (elle n'est pas portée par la droite reliant les deux charges électriques).

Action et réaction

De même, la charge électrique q_2 applique une force magnétique $\vec{F}_{2/1}$ sur q_1 égale à :

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \vec{v}_1 \wedge (\vec{v}_2 \wedge (\vec{r}_1 - \vec{r}_2))$$

Force de Laplace

Considérons un élément de volume conducteur filiforme (sous forme de fil) de longueur $d\ell$ de section S et parcouru par un courant permanent I. L'élément de volume $dV = d\ell\, S$ contient dN charges électriques élémentaires se déplaçant à une vitesse moyenne $\vec{\mathrm{v}}$, avec

$$dQ = q\, dN$$

Chaque charge électrique q subit de la part d'un champ magnétique $\vec{B}$ une force magnétique

$$\vec{F} = q\vec{\mathrm{v}} \wedge \vec{B}$$

De même, la quantité de charges électriques dN se trouvant dans l'élément $d\vec{\ell}$ subissent la force magnétique donnée par l'expression de Lorentz

$$d\vec{F} = dN\, q\vec{\mathrm{v}} \wedge \vec{B}$$

or

$$dN = \rho dV = \rho \vec{S} \cdot d\vec{\ell}$$

où ρ est la densité volumique des charges électriques dans le conducteur. On obtient donc

$$d\vec{F} = \rho \vec{S} \cdot d\vec{\ell} q \vec{\mathrm{v}} \wedge \vec{B}$$

Mais on sait que la densité de courant électrique est donnée par

$$\vec{\mathrm{J}} = \rho q \vec{\mathrm{v}}$$

ce qui donne

$$d\vec{F} = \vec{\mathrm{J}} \cdot \vec{S} d\vec{\ell} q \vec{\mathrm{v}} \wedge \vec{B}$$

Mais on a

$$\mathrm{I} = \vec{\mathrm{J}} \cdot \vec{S}$$

où on a supposé que $\vec{\mathrm{J}}$ est le même en tout point de la section du conducteur. On obtient finalement :

$$d\vec{F} = \mathrm{I} d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

Ceci est la force de Laplace qu'applique un champ magnétique $\vec{B}$ sur un élément de fil conducteur $d\vec{\ell}$ parcouru par un courant permanent I. En terme de densité de courant, elle s'écrit

$$d\vec{F} = \vec{\mathrm{J}} \wedge \vec{B} dV$$

où dV est l'élément de volume du conducteur de longueur $d\ell$

Cette expression impliquant $\vec{\mathrm{J}}$ est valable pour tout écoulement de charges dans un milieu (pas forcément un conducteur filiforme)

Le Conducteur ne contient pas que des charges mobiles !

Mais le conducteur électrique ne contient pas que des charges mobiles ; il contient aussi des charges fixes qui sont animées d'une vitesse $\vec{V}$ (puisque tout le conducteur se déplace sous l'effet du champ magnétique $\vec{B}$). Les charges mobiles sont quant à elles animées d'une vitesse $\vec{v} + \vec{V}$, où $\vec{v}$ est la vitesse des charges électriques sous l'effet d'une différence de potentiel (qui crée un courant électrique dans le fil conducteur) :

$$d\vec{F} = \rho_m \left[\vec{E} + (\vec{v} + \vec{V}) \wedge \vec{B}\right] dV + \rho_f \left[\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}\right] dV$$

où ρ_m est la densité de charges mobiles et ρ_f la densité de charges fixes.

Puisque le conducteur est neutre, on a

$$\rho_m + \rho_f = 0$$

ou encore

$$\rho_m = -\rho_f$$

ce qui donne

$$d\vec{F} = \rho_m(\vec{v} \wedge \vec{B})dV = \vec{\mathrm{J}} \wedge \vec{B}dV$$

où $\vec{\mathrm{J}}$ est le vecteur densité de courant des charges mobiles dans le conducteur.

Remarque

Rappelons que les charges électriques en mouvement dans un conducteur vont à leur tour créer un champ magnétique, en plus du champ magnétique externe appliqué sur le fil conducteur. Puisque le conducteur est neutre, on a

$$\rho_m + \rho_f = 0$$

ou encore

$$\rho_m = -\rho_f$$

ce qui donne

$$d\vec{F} = \rho_m(\vec{v} \wedge \vec{B})dV = \vec{\mathrm{J}} \wedge \vec{B}dV$$

Moment de force de Laplace

On définit le moment de la force de Laplace appliquée en P par rapport à un point O (généralement on prend le centre d'inertie) comme

$$d\vec{\Gamma}_{/O} = \overrightarrow{OP} \wedge d\vec{F} = \overrightarrow{OP} \wedge (\vec{\mathrm{J}} \wedge \vec{B})dV$$

Le moment de la force appliquée sur la totalité du volume s'obtient en intégrant sur le volume parcouru par un courant électrique, à savoir

$$\vec{\Gamma}_{/O} = \iiint \overrightarrow{OP} \wedge (\vec{\mathrm{J}} \wedge \vec{B})dV$$

Conducteur filiforme

Dans le cas d'un conducteur filiforme, on remplace

$$\vec{\mathrm{J}}dV \qquad \text{par} \qquad \mathrm{I}d\vec{\ell}$$

ce qui donne la force appliquée sur une partie du conducteur comme

$$\vec{F} = \mathrm{I}\int d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

et le moment de la force comme

$$\vec{\Gamma}_{/O} = \mathrm{I}\int \overrightarrow{OP} \wedge (d\vec{\ell} \wedge \vec{B})$$

Si le contour était fermé et le champ magnétique appliqué en tout point du circuit constant, on aura

$$\vec{F} = \mathrm{I}(\oint d\vec{\ell}) \wedge \vec{B}$$

Mais puisque

$$\oint d\vec{\ell} = \vec{0}$$

on aura finalement que la force totale appliquée par un champ magnétique constant sur une circuit fermé parcouru par un courant permanent I est nulle

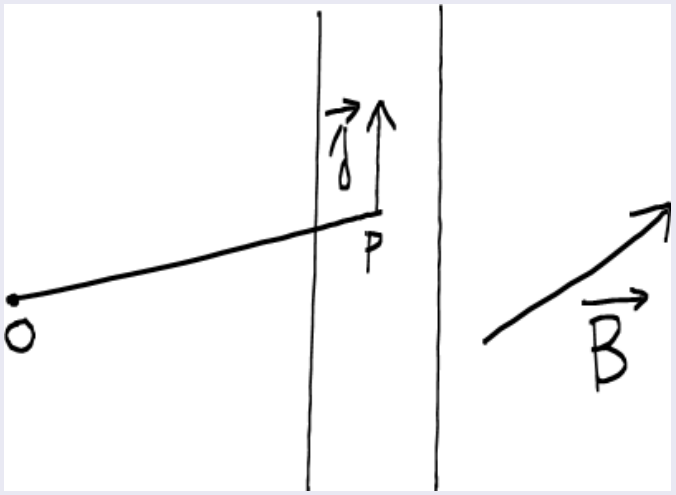
$$\vec{F} = \vec{0}$$

Moment de force non nul

Le moment de la force par rapport à un point O, par contre, n'est pas nul :

$$\vec{\Gamma}_{/O} = \mathrm{I} \int \overrightarrow{OP} \wedge (d\vec{\ell} \wedge \vec{B}) \neq 0$$

car même si le champ $\vec{B}$ est constant le vecteur $\vec{OP}$ n'est pas le même pour les éléments de longueur $d\vec{\ell}$.



Utilisons la relation suivante :

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

pour réécrire l'expression dans l'intégrale sous la forme

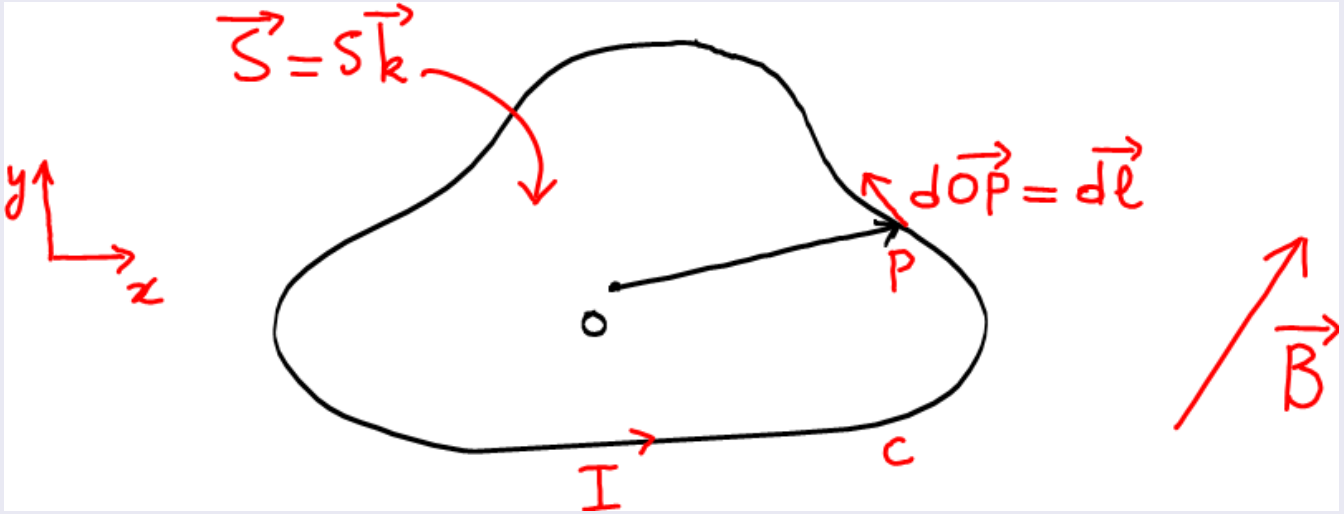
$$\overrightarrow{OP} \wedge (d\vec{\ell} \wedge \vec{B}) = d\vec{\ell}(\overrightarrow{OP} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(d\vec{\ell} \cdot \overrightarrow{OP})$$

on obtient donc

$$\vec{\Gamma}_{/O} = \mathrm{I}\left[\oint_{\text{spire}} d\vec{\ell}(\overrightarrow{OP} \cdot \vec{B}) - \oint_{\text{spire}} \vec{B}(d\vec{\ell} \cdot \overrightarrow{OP})\right]$$

avec

$$d\vec{\ell} = d\overrightarrow{OP}$$



Remarquons que

$$\oint_{\text{spire}} \vec{B}(d\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP}) = 0$$

Pour se convaincre, supposons que le circuit est dans le plan Oxy et le champ magnétique constant, avec

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} \qquad \text{d'où} \qquad d\overrightarrow{OP} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$$

ce qui donne

$$\oint_{\text{spire}} (d\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP}) = \oint_{\text{spire}} x\,dx + \oint_{\text{spire}} y\,dy$$

ou encore

$$\int_{x_0}^{x_0} x\,dx + \int_{y_0}^{y_0} y\,dy = 0$$

Il nous reste donc

$$\vec{\Gamma}_{/O} = \mathrm{I} \oint_{\text{spire}} d\vec{\ell}(\overrightarrow{OP} \cdot \vec{B})$$

avec

$$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_x\vec{k} \qquad \text{et} \qquad d\overrightarrow{OP} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$$

on obtient

$$\vec{\Gamma}_{/O} = \mathrm{I} \oint_{\text{spire}} (xB_x + yB_y)(dx\vec{i} + dy\vec{j})$$

ou encore

$$\vec{\Gamma}_{/O} = \mathrm{I}\left[\oint_{\text{spire}} xB_x\, dx\vec{i} + \oint_{\text{spire}} xB_x dy\vec{j} + \oint_{\text{spire}} yB_y dx\vec{i} + \oint_{\text{spire}} yB_y dy\vec{j}\right]$$

Le premier et le dernier terme du second membre de l'équation ci-dessus sont nuls pour les raisons précédemment indiquées.

Il nous reste donc

$$\vec{\Gamma}_{/O} = \mathrm{I}\left[\oint_{\text{spire}} xB_x\,dy\vec{j} + \oint_{\text{spire}} yB_y\,dx\vec{i}\right]$$

D'autre part, on a la propriété suivante

$$\oint d(xy) = 0 \qquad \text{car} \qquad \oint d(xy) = [xy]_P^P = 0$$

mais

$$\oint d(xy) = \oint x\,dy + \oint y\,dx$$

ce qui donne

$$\oint x\,dy = -\oint y\,dx$$

On obtient finalement

$$\vec{\Gamma}_{/O} = \mathrm{I}\left[B_x\vec{j} - B_y\vec{i}\right]\oint x\,dy$$

avec

$$\oint x\,dy = S$$

où S est la surface du circuit fermé.

Remarquons qu'il est possible d'écrire le moment de la force sous la forme

$$\vec{\Gamma}_{/O} = \mathrm{I}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & S \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix}.$$

ou encore

$$\vec{\Gamma}_{/O} = \mathrm{I}\vec{S} \wedge \vec{B}$$

La grandeur physique

$$\vec{\mathrm{m}} = \mathrm{I}\vec{S}$$

est par définition appelée moment dipolaire du dipôle magnétique créé par une boucle de section S parcourue par un courant permanent I. Ce qui permet d'écrire :

$$\vec{\Gamma}_{/O} = \vec{\mathrm{m}} \wedge \vec{B}$$

Le champ magnétique $\vec{B}$ appliqué sur le circuit filiforme a tendance à le faire tourner autour de lui même jusqu'à ce son moment dipolaire $\vec{\mathrm{m}}$ s'aligne avec $\vec{B}$.

Travail de la force de Laplace

Considérons un conducteur électrique soumis à un champ électrique $\vec{E}$ (dû à une différence de potentiel) et un champ magnétique $\vec{B}$. Au sein du conducteur, une charge mobile q_m se déplaçant à une vitesse $\vec{v}$ est soumise à la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q_m(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

La force de Laplace, quant à elle, appliquée sur le conducteur fait déplacer celui-ci causant ainsi le déplacement de ses charges fixes. Celles-ci auront donc une vitesse $\vec{V}$ par rapport à un référentiel fixe.

En fait, les charges mobiles se déplacent sur un élément infinitésimal

$$d\vec{\ell} + d\vec{L} = \vec{V}dt + \vec{v}dt$$

où $\vec{V}$ est la vitesse du conducteur sous l'effet de la force de Laplace et $\vec{v}$ la vitesse de la charge libre dans le conducteur.

Alors que les charges fixes se déplaceront sur un élément infinitésimal

$$d\vec{L} = \vec{V}dt$$

Le travail de la force de Laplace sur les charges électrique mobiles et fixes du conducteur est donné par

$$dW = d\vec{F}_m \cdot (d\vec{\ell} + d\vec{L}) + d\vec{F}_f \cdot d\vec{L}$$

ou encore

$$dW = d\vec{F}_m \cdot d\vec{\ell} + (d\vec{F}_f + d\vec{F}_m) \cdot d\vec{L} = dW_m + dW_L$$

où $d\vec{F}_m$ est la force de Laplace appliquée sur les charges électriques mobiles et $d\vec{F}_f$ la force de Laplace appliquée sur les charges électriques fixes.

Remarquons que le travail des charges mobiles au sein du conducteur

$$dW_m = d\vec{F}_m \cdot d\vec{\ell}$$

n'est pas perçu comme un travail qu'on peut mesurer dans un laboratoire puisqu'il s'agit d'un déplacement de charges à l'intérieur du conducteur.

Le travail de la force de Laplace proprement dit est donc

$$dW_L = (d\vec{F}_f + d\vec{F}_m) \cdot d\vec{L}$$

C'est ce qu'un manipulateur peut mesurer en constatant un cadre (circuit électrique) tourner sous l'effet d'un champ magnétique.

La force appliquée aux charges mobiles s'écrit :

$$d\vec{F}_m = \rho_m \, dV \left[\vec{E} + (\vec{v} + \vec{V}) \wedge \vec{B}\right]$$

où ρ_m est la densité volumique de la charge électrique mobile dans le conducteur et dV un volume infinitésimal du conducteur.

La force appliquées aux charges fixes (mobiles par rapport à un référentiel fixe) s'écrit :

$$d\vec{F}_f = \rho_f \, dV \left[\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}\right]$$

où ρ_f est la densité volumique de la charge électrique fixe.

Le travail de la force appliquée sur les charges mobiles est donné par :

$$dW_m = d\vec{F}_m \cdot d\vec{\ell} = \rho_m \, dV \left[\vec{E} + (\vec{v} + \vec{V}) \wedge \vec{B}\right] \cdot d\vec{\ell}$$

avec

$$d\vec{\ell} = \vec{v} dt$$

ce qui donne

$$dW_m = \rho_m \left[\vec{E} + (\vec{v} + \vec{V}) \wedge \vec{B}\right] \cdot \vec{v} dt \, dV$$

mais puisque

$$(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$$

et

$$\vec{\mathrm{J}}_m = \rho_m \, \vec{v}$$

la densité du courant dans le conducteur. On écrit

$$dW_m = (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{\mathrm{J}}_m dt \, dV$$

Le travail de la force de Laplace s'écrit donc sous la forme :

$$dW_L = d\vec{F}_m \cdot d\vec{\ell} = \rho_m \, dV \left[\vec{E} + (\vec{v} + \vec{V}) \wedge \vec{B}\right] \cdot d\vec{\ell}$$

avec

$$d\vec{\ell} = \vec{v} dt$$

ce qui donne

$$dW_L = \rho_m \left[\vec{E} + (\vec{v} + \vec{V}) \wedge \vec{B}\right] + \rho_f \left[\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}\right] \cdot \vec{V} dt \, dV$$

Puisque le conducteur est neutre, on aura

$$\rho_m + \rho_f = 0$$

ce qui, en remplaçant dans l'expression précédente, donne

$$dW_L = \rho_m (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{V} dt \, dV$$

ou encore

$$dW_L = (\vec{\mathrm{J}}_m \wedge \vec{B}) \cdot \vec{V} dt\, dV$$

On obtient

$$dW = dW_m + dW_L = \left[(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{\mathrm{J}}_m + (\vec{\mathrm{J}}_m \wedge \vec{B}) \cdot \vec{V} \right] dt\, dV$$

Mais on sait que

$$(\vec{V} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{\mathrm{J}}_m = -(\vec{\mathrm{J}}_m \wedge \vec{B}) \cdot \vec{V}$$

ce qui donne enfin

$$dW = \vec{E} \cdot \vec{\mathrm{J}}_m\, dt\, dV$$

Remarque importante

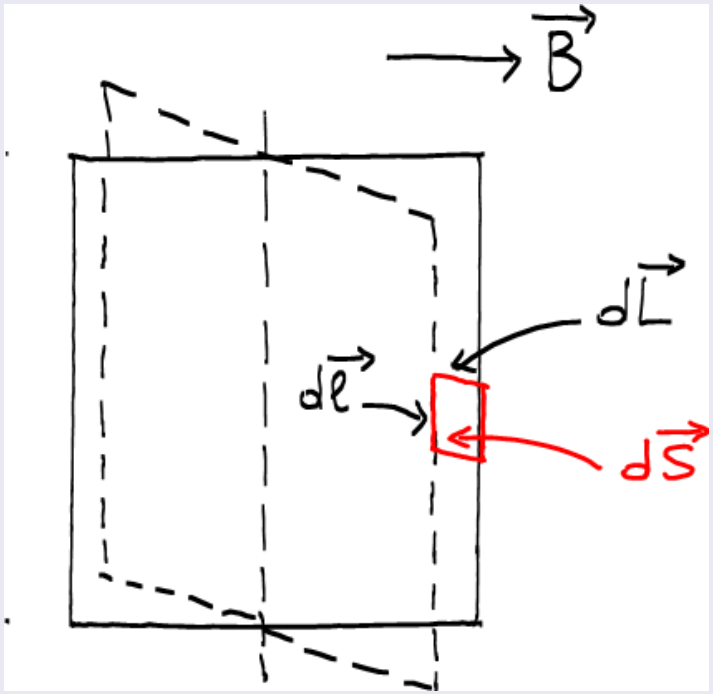
Les termes d'origine magnétiques se compensent, ce qui signifie que les forces magnétiques ne travaillent pas. Cette compensation est liée à la conversion de l'énergie électrique (champ électrique dans un conducteur) en une énergie mécanique sous forme de déplacement du conducteur.

Reprenons maintenant l'expression du travail de la force de Laplace :

$$dW_L = (\vec{\mathrm{J}}_m \wedge \vec{B}) \cdot \vec{V}\, dt\, dV$$

Pour un conducteur filiforme, on remplace

$$\vec{\mathrm{J}}_m\, dV \qquad \text{par} \qquad \mathrm{I} \cdot d\vec{\ell}$$



tout en sachant que

$$d\vec{L} = \vec{V}\,dt$$

ce qui donne enfin

$$dW_L = \mathrm{I}(d\vec{\ell} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{L}$$

ou encore

$$dW_L = \mathrm{I}\vec{B} \cdot (d\vec{L} \wedge d\vec{\ell})$$

où

$$d\vec{s} = d\vec{L} \wedge d\vec{\ell} = ds\,\vec{n}$$

est l'élément de surface balayée par l'élément $d\vec{\ell}$ du circuit pendant le déplacement $d\vec{L}$. Ce qui nous permet d'écrire

$$dW_L = \mathrm{I}\vec{B} \cdot d\vec{s}$$

où

$$d^2\phi = \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

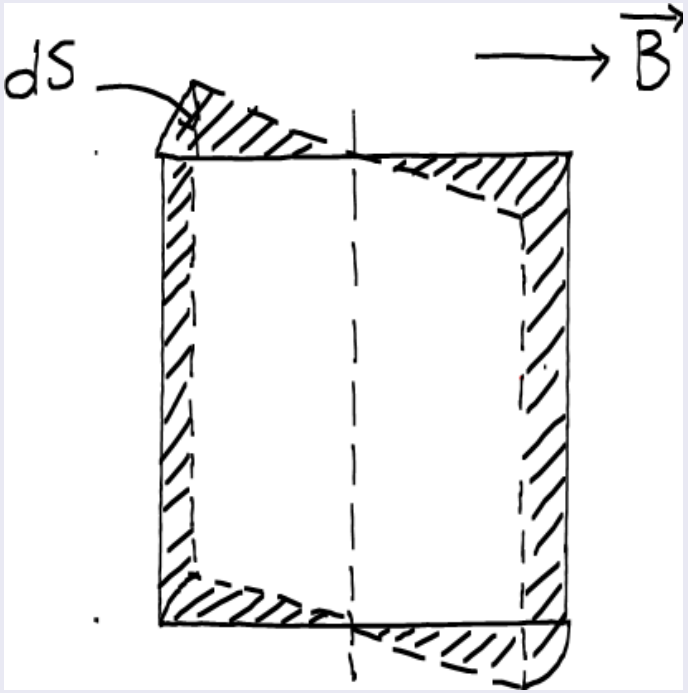
est l'élément du flux du champ magnétique $\vec{B}$ à travers l'élément de surface $d\vec{s}$.

L'intégration de $d^2\Phi$ sur la totalité du contour formant le circuit donne le flux du champ magnétique sortant à travers la surface dS balayée par le circuit lorsqu'il a tourné pendant un déplacement $d\vec{L}$:

$$\Phi_{dS} = \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

avec

$$dW_L = \mathrm{I}\Phi_{dS}$$



Utilisation du théorème d'Ampère dans le calcul du flux magnétique

Il est possible de calculer l'élément de flux $d\Phi$ en remarquant que le flux du champ magnétique à travers une surface fermé est

Pour le besoin de notre démonstration, on choisit un conducteur sous forme de rectangle parcouru par un courant I. En tournant d'un angle π autour d'un axe passant par son plan, le cadre balayera la surface fermée d'un cylindre. Pendant un temps relativement court, le cadre balayera une surface dS.

Le flux du champ magnétique à travers la surface fermée (imaginaire) du cylindre est donné par :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{dS} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

avec

$$\Phi_{dS} = \iint_{dS} \vec{B} \cdot d\vec{S}, \qquad \Phi_1 = \iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} \qquad \text{et} \qquad \Phi_2 = \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

En plus de ces trois surfaces, on aura besoin de définir le flux du champ magnétique à travers la surface du cadre dans sa position 1 (début de la rotation du cadre)

$$\Phi_1^{\text{cadre}} = \iint_{\text{cadre}}^{(1)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

ainsi que le flux de $\vec{B}$ à travers le même cadre lorsque ce dernier aurait atteint la position 2 (balayant ainsi la surface dS), à savoir

$$\Phi_2^{\text{cadre}} = \iint_{\text{cadre}}^{(2)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

On aura aussi besoin de séparer l'élément de surface balayée par le cadre dS en deux surfaces, dS_1 et dS_2 :

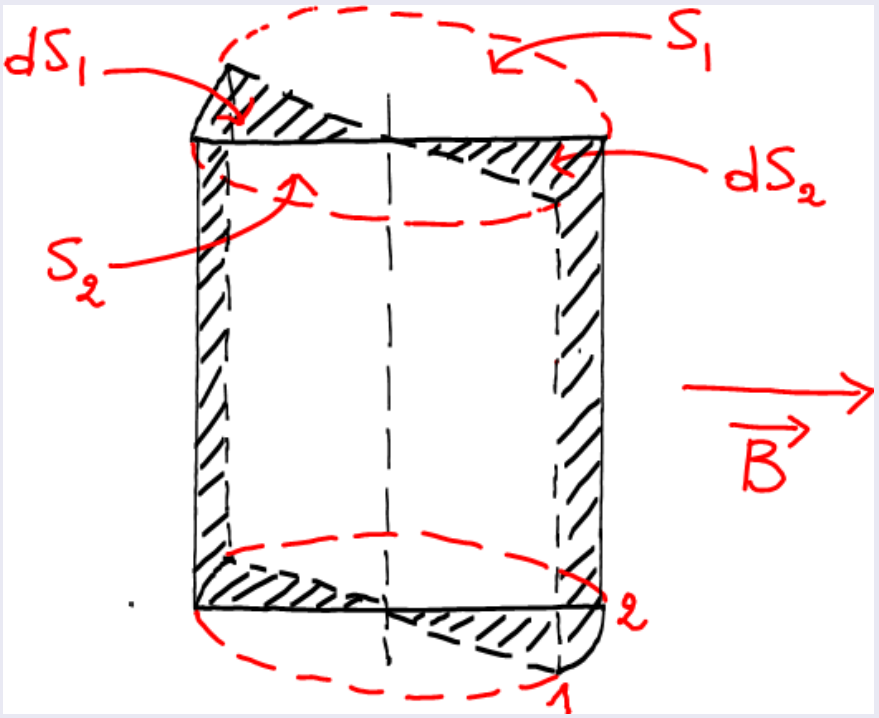
$$\Phi_{dS_1} = \iint_{dS_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

et

$$\Phi_{dS_2} = \iint_{dS_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

telle que

$$\Phi_{dS} = \Phi_{dS_1} + \Phi_{dS_2}$$


dS_1
S_1
dS_2
S_2
$\vec{B}$
2
1

Bilan des flux magnétiques à travers les surfaces fermées

Faisons maintenant le bilan des flux magnétiques à travers les trois différentes surfaces fermées :
Pour la surface fermée formée par la moitié du cylindre et la surface du cadre en position (1)

$$\Phi_2 + \Phi_{dS_1} + \Phi_1^{\text{cadre}} = 0 \qquad (2)$$

alors que pour la surface fermée formée par la moitié du cylindre et la surface du cadre en position (2)

$$\Phi_1 + \Phi_{dS_1} - \Phi_2^{\text{cadre}} = 0 \qquad (3)$$

Enfin, pour la surface totale fermée, on a

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_{dS} = 0 \qquad (1)$$

Remarque importante

Le changement de signe devant le flux du cadre dans les équations (1) et (2) (+ pour (1) et − pour (2)) est dû au fait que le vecteur normal à la surface du cadre est dans une direction (positive dans (1)) lorsque le cadre est dans la position 1, alors qu'il est dans la direction opposée (négative dans (2)) lorsque celui-ci était dans la position 2.

En faisant l'addition (1) + (2), on trouve

$$\Phi_2 + \Phi_1 = \Phi_1^{\text{cadre}} - \Phi_2^{\text{cadre}}$$

mais on sait d'après l'équation (3) que

$$\Phi_{dS} = -(\Phi_1 + \Phi_2)$$

ce qui donne enfin

$$\Phi_{dS} = \Phi_2^{\text{cadre}} - \Phi_1^{\text{cadre}}$$

Ce résultat montre que le flux magnétique coupé par le cadre tournant dans un champ magnétique $\vec{B}$ est égal à la variation du flux magnétique à travers la surface du même cadre. Par conséquent

$$dW_L = \mathrm{I}\Phi_{dS} = \mathrm{I}(\Phi_2^{\text{cadre}} - \Phi_1^{\text{cadre}})$$

Théorème de Maxwell

On peut à présent énoncer le théorème de Maxwell :
Le travail des forces de Laplace appliquées à un circuit rigide, filiforme, parcouru par un courant permanent I, se déplaçant dans un champ magnétique constant $\vec{B}$ est égal au produit de I par la variation du flux magnétique de $\vec{B}$ à travers le circuit.

$$dW_L = \mathrm{I}d\Phi$$

Remarque

Ce résultat n'est valable que dans le cas où le champ magnétique $\vec{B}$ appliqué est statique (constant dans le temps).

Si le cadre parcouru par un courant permanent I peut évoluer sous l'action de la force de Laplace dans un champ magnétique $\vec{B}$, celle-ci fournit un travail égal à

$$dW_L = \mathrm{I} d\Phi$$

D'autre part le flux Φ va augmenter jusqu'à atteindre une valeur maximale possible compte tenu de l'orientation de $\vec{B}$ et de I.

Le cadre électrique est donc susceptible de se déplacer et donc développer une vitesse, et partant une énergie cinétique. Cette énergie est le résultat de la conversion d'une partie de son énergie potentielle acquise par la présence du cadre parcouru par un courant continu I dans un champ magnétique $\vec{B}$:

$$dE_C = dW_L$$

puisque c'est le travail de la force de Laplace qui est converti en énergie cinétique.

Conservation de l'énergie totale

D'autre part, en considérant que l'énergie totale du système est conservée, il est possible d'écrire

$$d(E_C + E_P) = 0$$

ou encore

$$dE_P = -dE_C = -dW_L = -\mathrm{I}d\Phi$$

ou encore en intégrant

$$E_P = -\mathrm{I}\Phi + cste$$

où la constante est obtenue en considérant que l'énergie potentielle d'interaction du cadre avec le champ magnétique est nulle à l'infini.

puisque le champ magnétique $\vec{B}$ est constant, le flux de ce dernier s'écrit

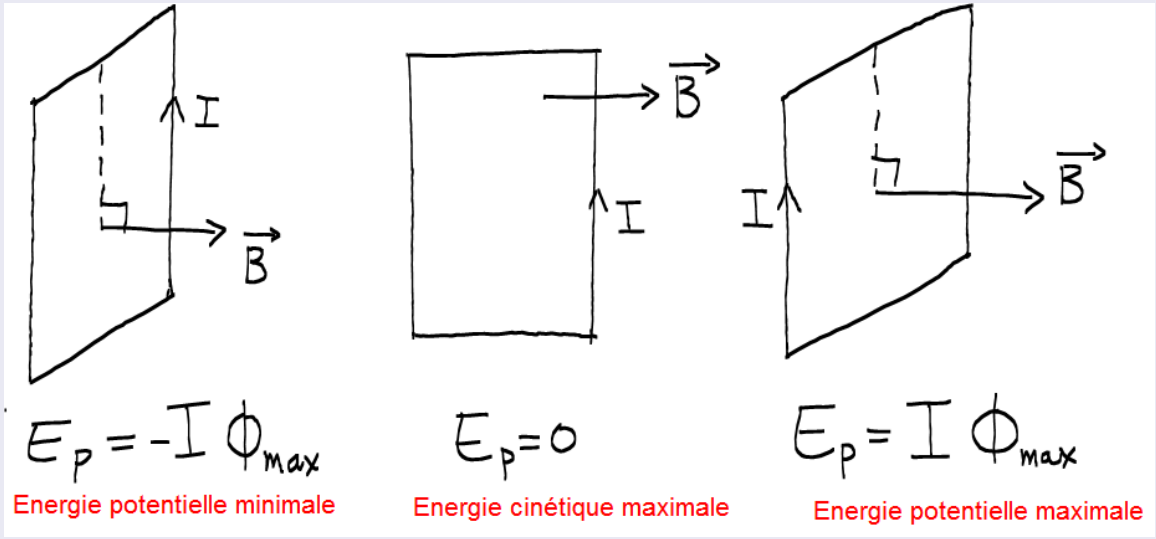
$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

où $\vec{S}$ est le vecteur de la surface du cadre. D'autre part on sait que le moment dipolaire du dipôle électrostatique du circuit s'écrit

$$\vec{\mathrm{m}} = \mathrm{I}\vec{S}$$

ce qui permet d'écrire

$$E_P = -\vec{\mathrm{m}} \cdot \vec{B}$$


I
$\vec{B}$
$E_p = -I\,\Phi_{max}$
Energie potentielle minimale
$\vec{B}$
I
$E_p = 0$
Energie cinétique maximale
I
$\vec{B}$
$E_p = I\,\Phi_{max}$
Energie potentielle maximale

La force de laplace comme force dérivant d'une énergie potentielle d'intéraction

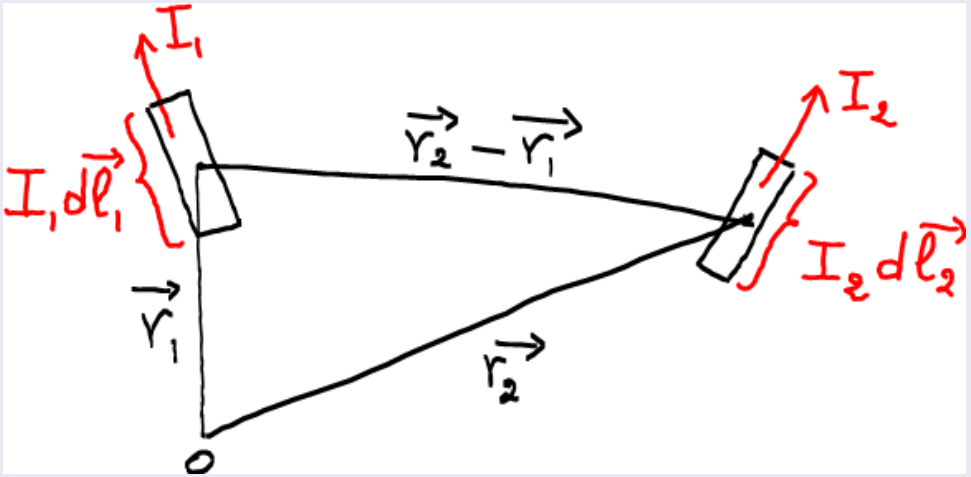
Il est donc possible de trouver l'expression de la force de Laplace appliquée sur un cadre parcouru par un courant I permanent plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ comme

$$\vec{F}_L = -\vec{\nabla} E_P = \mathrm{I}\vec{\nabla}\Phi$$

Le circuit électrique (cadre parcouru par un courant permanent I tend toujours à se placer dans des conditions d'équilibre stable, où le flux du champ magnétique $\vec{B}$ à travers celui-ci sera maximum : Ceci est la règle du flux maximum.

Interaction entre deux courants rectilignes et parallèles : définition de l'ampère

Commençons par définir la force qu'applique un élément d'un conducteur $I_1 d\vec{\ell}_1$ sur un élément de courant sur un autre conducteur $I_2 d\vec{\ell}_2$ positionnés respectivement en $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$



L'élément de courant $\mathrm{I}_1 d\vec{\ell}_1$ créé en $\vec{r}_2$ (sur l'élément $\mathrm{I}_2 d\vec{\ell}_2$) un champ magnétique $d\vec{B}_1(\vec{r}_2)$ égal à :

$$d\vec{B}_1(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathrm{I}_1 d\vec{\ell}_1 \wedge (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

Selon Laplace, la force qu'applique le champ magnétique $d\vec{B}_1(\vec{r}_2)$ (dont la source est l'élément $\mathrm{I}_1 d\vec{\ell}_1$) sur l'élément $\mathrm{I}_2 d\vec{\ell}_2$ est donnée par :

$$d\vec{F}_{1/2} = \mathrm{I}_2 d\vec{\ell}_2 \wedge d\vec{B}_1(\vec{r}_2)$$

ou encore

$$d\vec{F}_{1/2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathrm{I}_2 d\vec{\ell}_2 \wedge (\mathrm{I}_1 d\vec{\ell}_1 \wedge (\vec{r}_2 - \vec{r}_1))}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

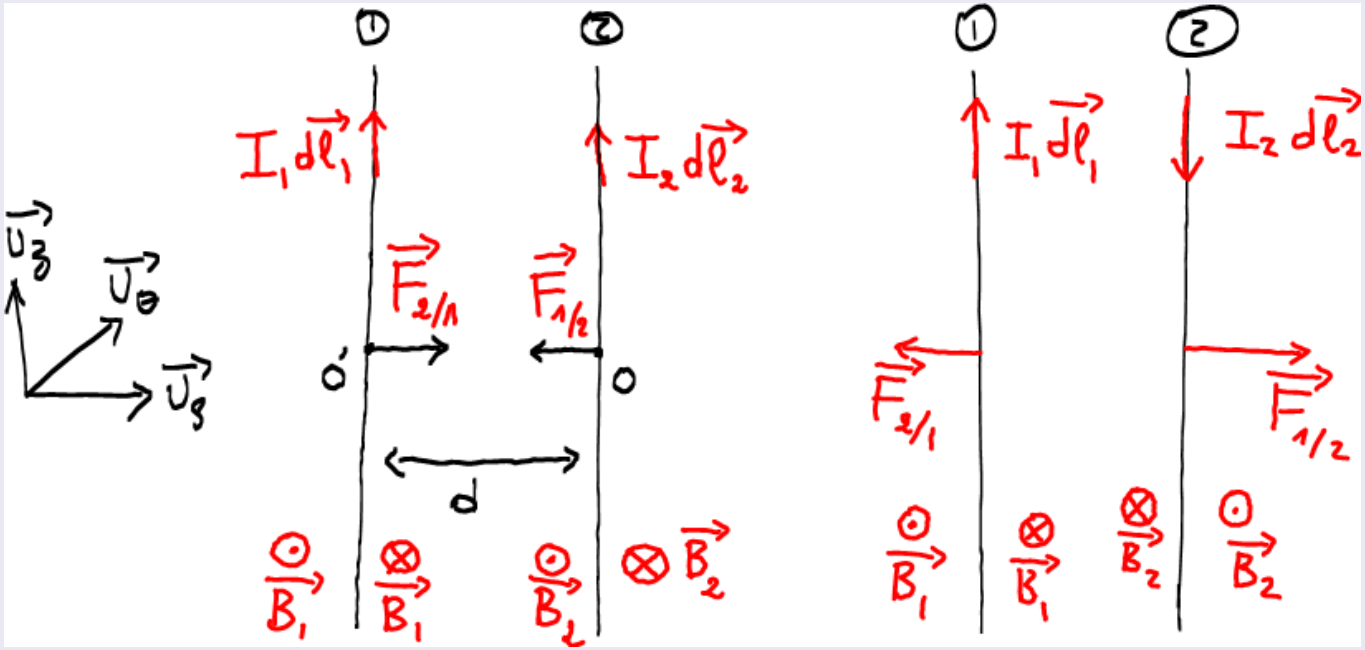
De même, l'élément de courant $\mathrm{I}_2 d\vec{\ell}_2$ applique un force magnétique sur l'élément $\mathrm{I}_2 d\vec{\ell}_2$ égale à :

$$d\vec{F}_{2/1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathrm{I}_1 d\vec{\ell}_1 \wedge (\mathrm{I}_2 d\vec{\ell}_2 \wedge (\vec{r}_1 - \vec{r}_2))}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

Cas de deux fils conducteurs rectilignes parallèles

Considérons deux conducteurs rectilignes parallèles de longueur infinie séparés par une distance d parcourus respectivement par des courants permanents I_1 et I_2. Deux cas se présentent :

1. I_1 et I_2 sont dans le même sens :
   Le champ magnétique créé par un fil conducteur infini et parcouru par un courant permanent I_1 en un point O (situé sur le deuxième fil conducteur à une distance d du premier conducteur) est donné par :
   $$\vec{B}_1(O) = \frac{\mu_0 \mathrm{I}_1}{2\pi d}\vec{u}_\theta$$
   Donc la force magnétique appliquée par le fil conducteur parcouru par I_1 sur un élément de courant $\mathrm{I}_2 d\vec{\ell}_2$ centré sur O est égale à :
   $$d\vec{F}_{1/2} = \mathrm{I}_2 d\vec{\ell}_2 \wedge d\vec{B}_1(0) = \mathrm{I}_2\, d\ell_2\, B_1(0)\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\theta = -\mathrm{I}_2\, d\ell_2 \frac{\mu_0 \mathrm{I}_1}{2\pi\, d}\vec{u}_\rho$$


1
2
$I_1 d\vec{\ell}_1$
$I_2 d\vec{\ell}_2$
$\vec{u}_z$
$\vec{u}_\theta$
$\vec{u}_\rho$
$\vec{F}_{2/1}$
$\vec{F}_{1/2}$
O'
O
d
$\vec{B}_1$
$\vec{B}_1$
$\vec{B}_2$
$\vec{B}_2$
1
2
$I_1 d\vec{\ell}_1$
$I_2 d\vec{\ell}_2$
$\vec{F}_{2/1}$
$\vec{F}_{1/2}$
$\vec{B}_1$
$\vec{B}_1$
$\vec{B}_2$
$\vec{B}_2$

La force magnétique appliquée par le fil conducteur par le fil conducteur parcouru par un courant permanent I_1 sur un fil conducteur de longueur ℓ_2 parcouru par un un courant permanent I_2 est obtenue en intégrant l'expression ci-dessus, ce qui donne :

$$\vec{F}_{1/2} = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2 I_1}{d}\ell_2\vec{u}_\rho$$

De même, la force magnétique appliquée par le fil conducteur par le fil conducteur parcouru par un courant permanent I_2 sur un fil conducteur de longueur ℓ_1 parcouru par un un courant permanent I_1 est donnée par :

$$\vec{F}_{2/1} = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2 I_1}{d}\ell_1\vec{u}_\rho$$

L'interaction entre deux fils conducteurs de longueurs ℓ_1 et ℓ_2 parcourus par des courants permanents I_1 et I_2, respectivement est une attraction entre les deux fils.

2. I_1 et I_2 sont dans deux sens opposés :
   Le champ magnétique créé par un fil conducteur infini et parcouru par un courant permanent I_1 en un point O (situé sur le deuxième fil conducteur à une distance d du premier conducteur) est donné par :

$$\vec{B}_1(O) = \frac{\mu_0 \mathrm{I}_1}{2\pi d}\vec{u}_\theta$$

   Mais cette fois-ci

$$\mathrm{I}_2 d\vec{\ell}_2 = -\mathrm{I}_2 d\ell_2 \vec{u}_z$$

   ce qui donne

$$d\vec{F}_{1/2} = \mathrm{I}_2 d\vec{\ell}_2 \wedge d\vec{B}_1(0) = \mathrm{I}_2\, d\ell_2\, B_1(0)\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\theta = \mathrm{I}_2\, d\ell_2 \frac{\mu_0 \mathrm{I}_1}{2\pi\, d}\vec{u}_\rho$$

La force magnétique appliquée par le fil conducteur par le fil conducteur parcouru par un courant permanent I_1 sur un fil conducteur de longueur ℓ_2 parcouru par un un courant permanent I_2 est obtenue en intégrant l'expression ci-dessus, ce qui donne :

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2 I_1}{d}\ell_2 \vec{u}_\rho$$

De même, la force magnétique appliquée par le fil conducteur par le fil conducteur parcouru par un courant permanent I_2 sur un fil conducteur de longueur ℓ_1 parcouru par un un courant permanent I_1 est donnée par :

$$\vec{F}_{2/1} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2 I_1}{d}\ell_1 \vec{u}_\rho$$

L'interaction entre deux fils conducteurs de longueurs ℓ_1 et ℓ_2 parcourus par des courants permanents I_1 et I_2, respectivement est une répulsion entre les deux fils.