Éléments d'analyse vectorielle

Mohamed Mebrouki

EPST Tlemcen

1 septembre 2015

Grandeur scalaire :

Grandeur physique complètement définie en un point de l'espace au moyen d'un nombre indépendamment de toute direction ; exemples : le temps, la masse, la pression, l'énergie cinétique, l'énergie potentielle, la température, etc...

On peut les additionner, les soustraire, les multiplier, les diviser, etc...

Grandeur vectorielle :

Grandeur physique complètement définie par sa longueur (module, norme), sa direction (droite portant le vecteur) et son sens de parcourir la direction ; exemples : la vitesse d'un mobile, son accélération, la force agissant sur le mobile, la variation de la température, etc...

Grandeur tensorielle :

On s'en fiche complètement..... !

Notions de référentiel et de repère

En physique, un référentiel est un corps solide dans lequel un observateur fait des expériences (laboratoire, ascenseur, train, terre, etc$\cdots$) On dote ce corps solide d'un système de trois (03) axes (non coplanaires) de coordonnées de l'espace dont l'origine est fixée sur ce même corps. Ce système d'axes de coordonnées est appelé repère spatial. En fait, ces trois axes de coordonnées n'ont aucune réalité physique ; ce ne sont que des outils mathématiques permettant d'étudier le mouvement d'un mobile. Il existe un autre repère dit repère temporel, qui sert à mesurer le temps par rapport à une origine (début). En mécanique classique, le temps est absolu (universel), c'est-à-dire qu'il est partout le même et quelle que soit l'état du mobile. Dans ce cas, on se limite au repère spatial.

Il est possible d'avoir des repères détachés du référentiel choisi. C'est ainsi, qu'on peut, dans un problème de mécanique, utiliser une multitude de repères attachés de manières arbitraires à des mobiles dans un seul référentiel !

Un cas particulier de référentiels est le référentiel galiléen doté d'une base orthogonale de trois vecteurs orthonormés (orthogonaux les uns aux autres avec une longueur égale à l'unité de mesure) d'espace. Un référentiel galiléen est un référentiel où un corps, soumis à aucune force (isolé), est en translation rectiligne uniforme. Le référentiel terrestre, centré en un point de la terre, peut être considéré comme galiléen lorsque la durée de l'expérience est très inférieure à la période de rotation de la terre.

Composantes d'un vecteur :

En physique, on choisit (généralement, mais pas tout le temps !), pour l'espace à trois dimensions, un système d'axes rectangulaires d'origine O et muni d'une base orthonormée constituée de trois vecteurs unitaires (de module égal à l'unité) et perpendiculaires entre eux : $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$. Ce qui permet de définir les composantes suivant les coordonnées cartésiennes x, y et z, d'un vecteur $\vec{A}$ comme suit :

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

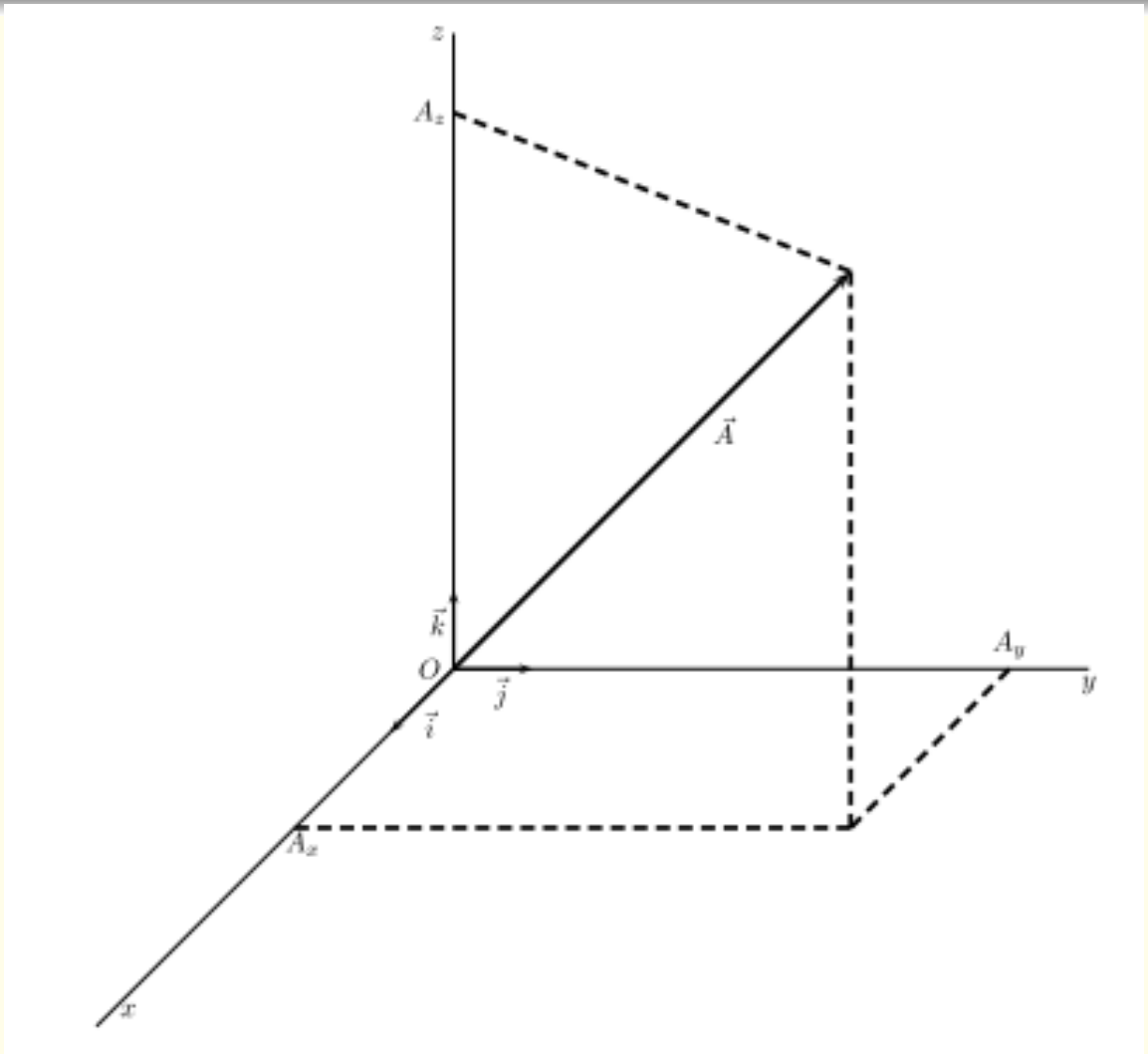
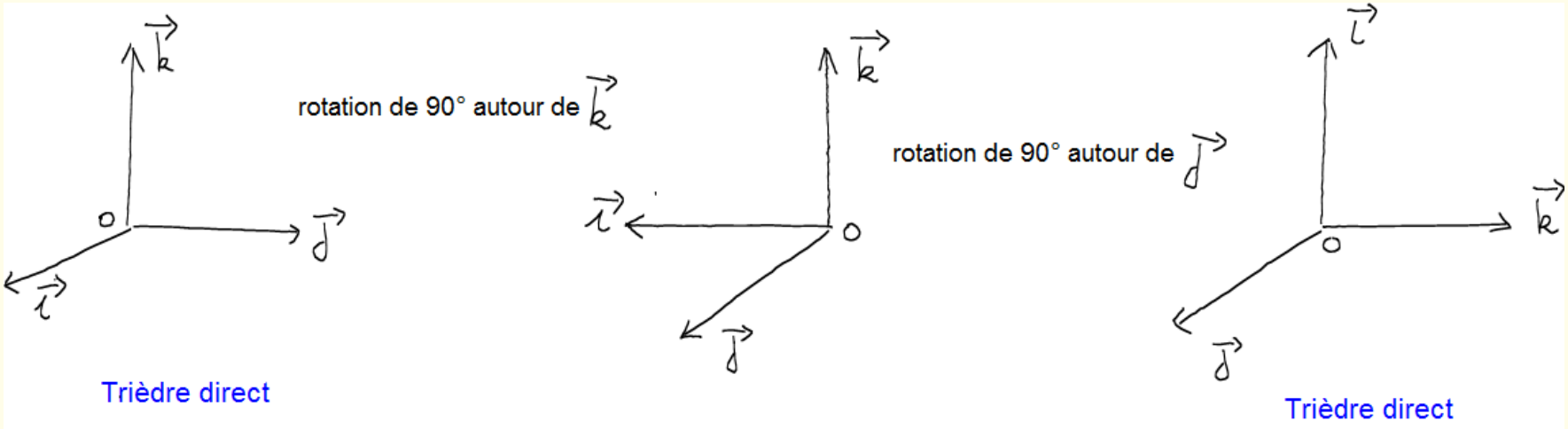


Figure : Composantes du vecteur $\vec{A}$ dans un système de coordonnées cartésiennes

Trièdre direct

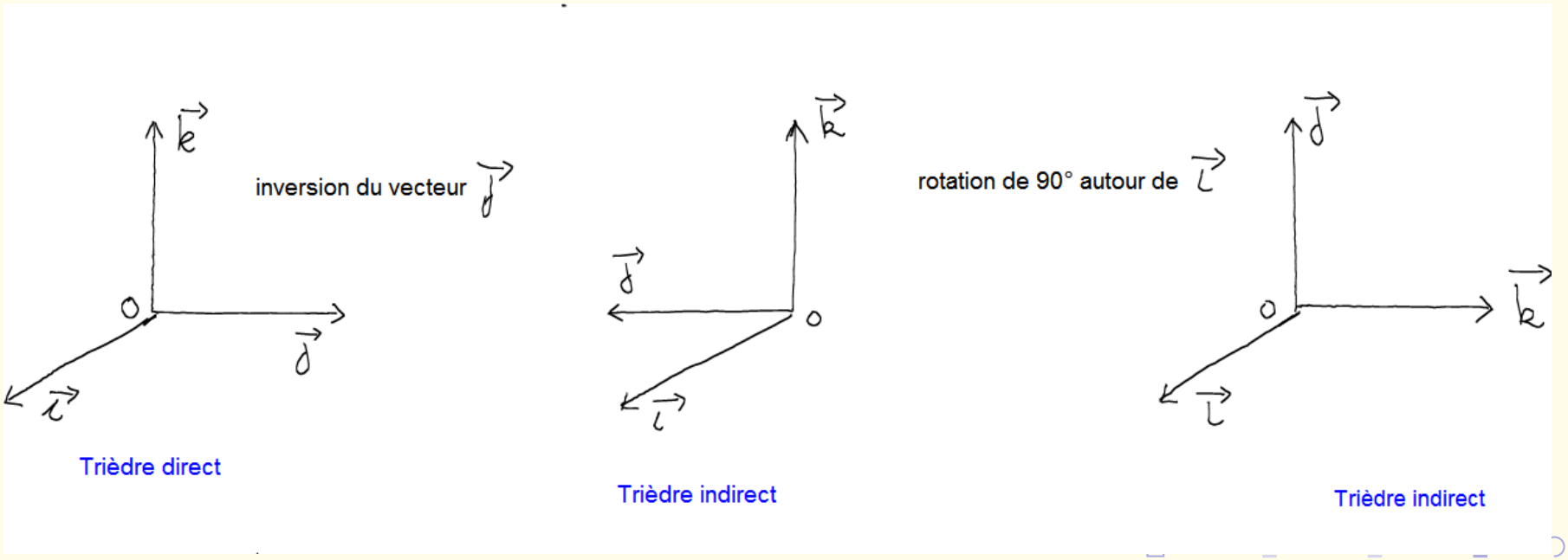
Par convention, un trièdre direct est construit sur la base de trois vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ en dirigeant $\vec{i}$ selon l'index , $\vec{j}$ selon le majeur et $\vec{k}$ selon le pouce de la main droite.



On peut passer d'un trièdre direct vers un autre trièdre direct moyennant des rotations physiques autour d'un axe quelconque.

Trièdre indirect :

Il est impossible de passer d'un trièdre direct vers un trièdre indirect à travers des rotations physiques. En effet, pour passer d'un trièdre direct vers un trièdre indirect on doit inverser la direction d'un des axes (opération non physique !)



Module d'un vecteur :

Le module (la norme ou la longueur) d'un vecteur

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

est donné par :

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Le module d'un vecteur est toujours positif ! !

Direction d'un vecteur :

Le vecteur unitaire $\vec{u}$ indiquant la direction (et le sens) d'un vecteur $\vec{A}$ est donné par :

$$\vec{u} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$$

tel que

$$\vec{A} = |\vec{A}|\vec{u}$$

On appelle cosinus directeurs du vecteur $\vec{A}$ les quantités suivantes :

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{A_x}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \\ \cos\beta = \dfrac{A_y}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \\ \cos\gamma = \dfrac{A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \end{cases}$$

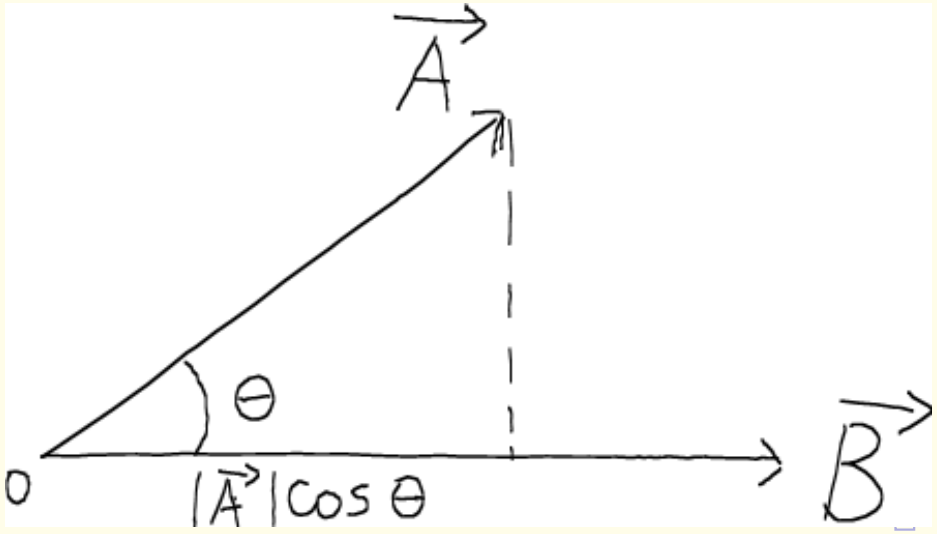
tels que α est l'angle que fait le vecteur $\vec{A}$ avec l'axe des x, β l'angle que fait le vecteur $\vec{A}$ avec l'axe des y et γ l'angle que fait le vecteur $\vec{A}$ avec l'axe des z.

Produit scalaire

Comme pour le cas où on multiplie un scalaire par un autre, il existe une opération mathématique faisant intervenir deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ appelée produit scalaire et définie comme suit :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta \qquad \text{scalaire}$$

où $|\vec{A}|$ et $|\vec{B}|$ sont les modules des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$, respectivement, et θ le plus petit angle entre eux.



$|\vec{A}|\cos\theta$ est la valeur de la projection du vecteur $\vec{A}$ sur le vecteur $\vec{B}$ en unité de $\vec{B}$, c-à-d de combien le vecteur $\vec{B}$ contribue au vecteur $\vec{A}$

Produit scalaire

Une autre manière de calculer le produit scalaire entre deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est donnée par :

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k})\cdot(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k})$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x\vec{i}\cdot\vec{i} + A_xB_y\vec{i}\cdot\vec{j} + \cdots + A_yB_z\vec{j}\cdot\vec{k} + \cdots + A_zB_z\vec{k}\cdot\vec{k}$$

ce qui donne

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \qquad \text{scalaire !}$$

puisque

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1, \qquad \text{et} \qquad \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0$$

car les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont unitaires et perpendiculaires entre eux.

En plus, le produit scalaire nous permet de réécrire un vecteur

$$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$$

sous la forme :

$$\vec{A}=(\vec{A}\cdot\vec{i})\vec{i}+(\vec{A}\cdot\vec{j})\vec{j}+(\vec{A}\cdot\vec{k})\vec{k}$$

Comme il nous permet aussi d'écrire le module d'un vecteur sous la forme :

$$|\vec{A}|=\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}$$

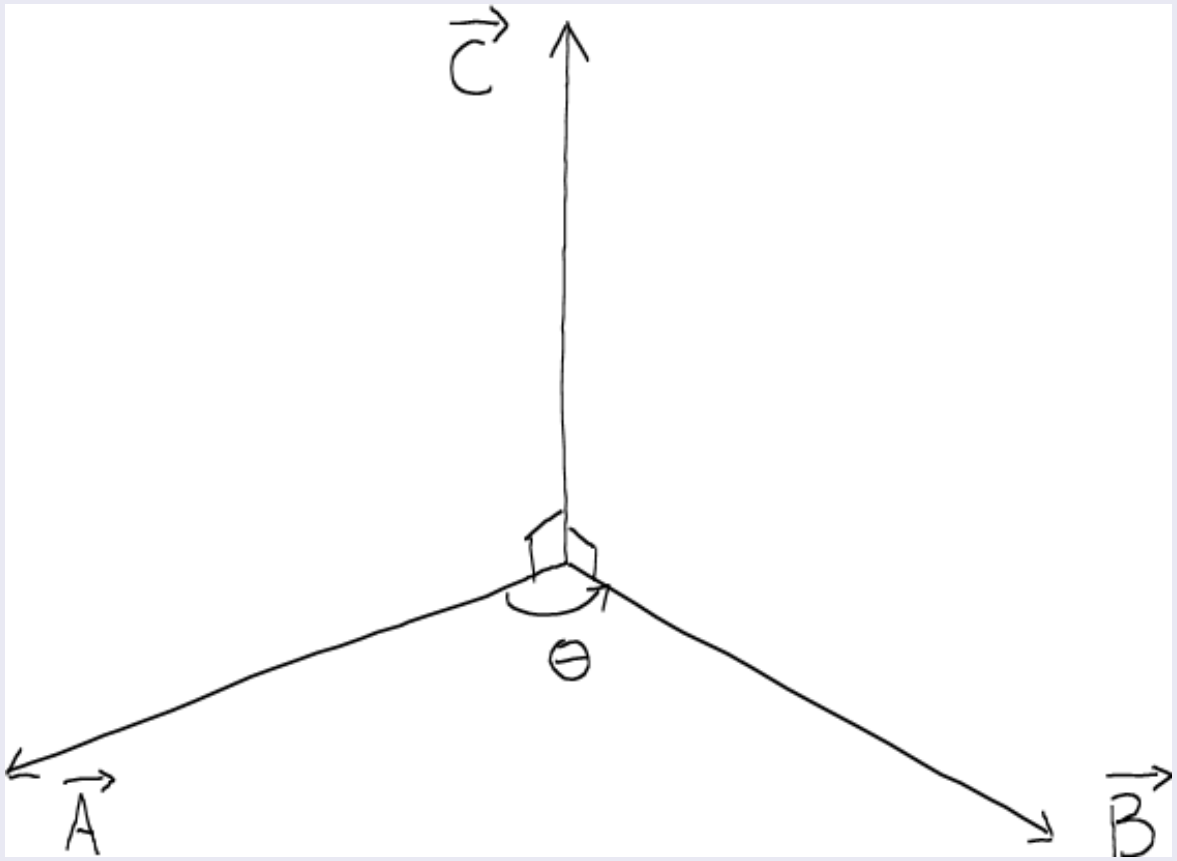
Produit vectoriel

C'est une combinaison entre deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ qui donne un troisième vecteur $\vec{C}$ perpendiculaire au plan contenant les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

Par définition

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} \equiv |\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta \, \vec{u}$$

θ est l'angle le plus petit entre les deux vecteurs et $\vec{u}$ le vecteur unitaire perpendiculaire au plan contenant les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.



La direction de $\vec{C}$ est, par convention, choisie dans le sens de progression d'un tire-bouchon qui tournerait de $\vec{A}$ vers $\vec{B}$.

Le vecteur $\vec{C}$ est dit plutôt un pseudo-vecteur, puisque son sens est défini par convention (il n'a pas une réalité physique ! ! !)

Produit vectoriel

Le vecteur résultant d'un produit vectoriel peut être obtenu par la technique du déterminant :

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

tel que

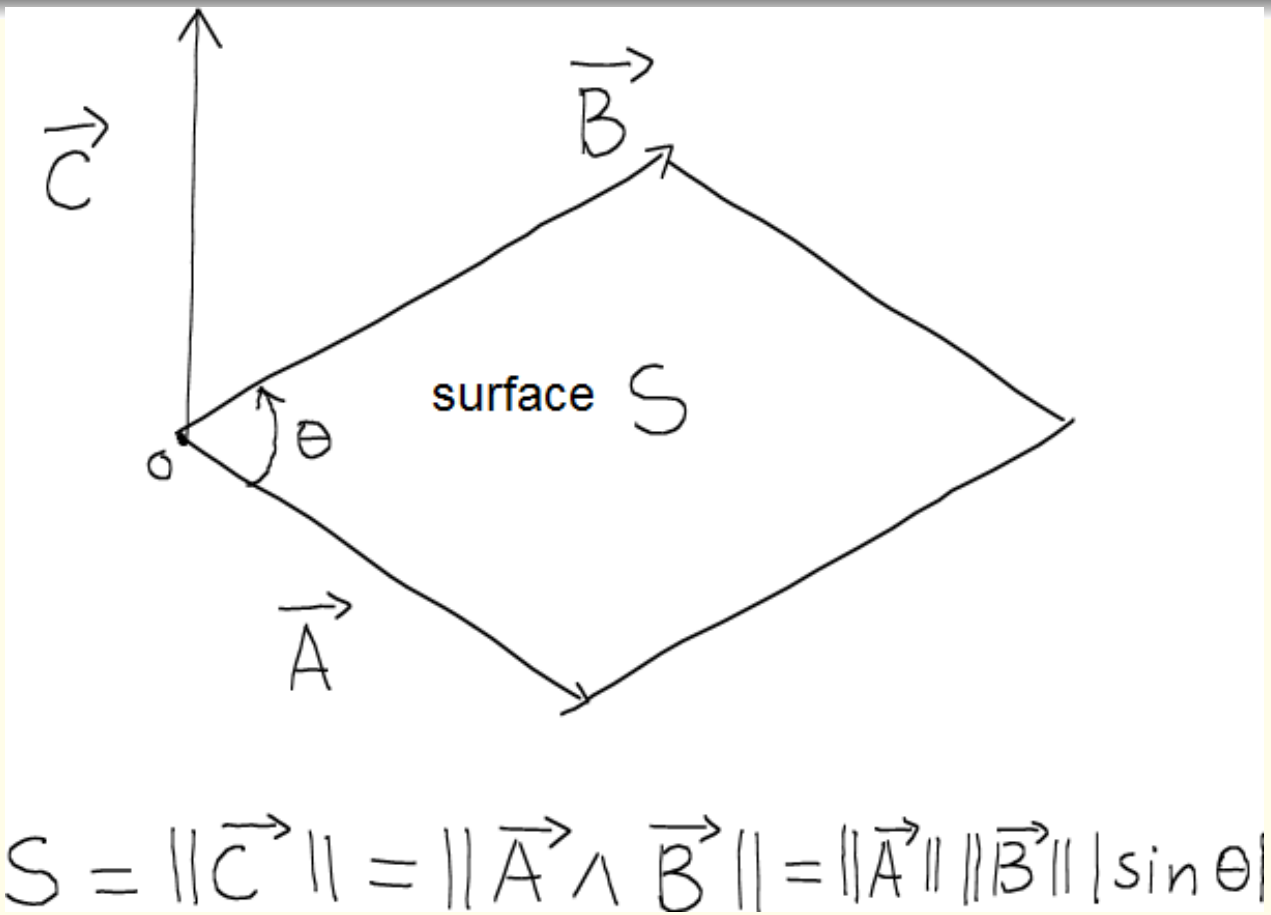
$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\vec{i} - (A_x B_z - A_z B_x)\vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\vec{k}$$

Dans le cas où les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont parallèles ($\theta = 0$) ou antiparallèles ($\theta = \pi$) : $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0}$

Le produit vectoriel n'est pas commutatif :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$$

Géométriquement, le module du vecteur $\vec{A} \wedge \vec{B}$ ($|\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta$) est une mesure de la surface délimitée par ces deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.


$\vec{C}$
$\vec{B}$
surface S
θ
o
$\vec{A}$
$S = \|\vec{C}\| = \|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = \|\vec{A}\| \, \|\vec{B}\| \, |\sin\theta|$

Produit mixte :

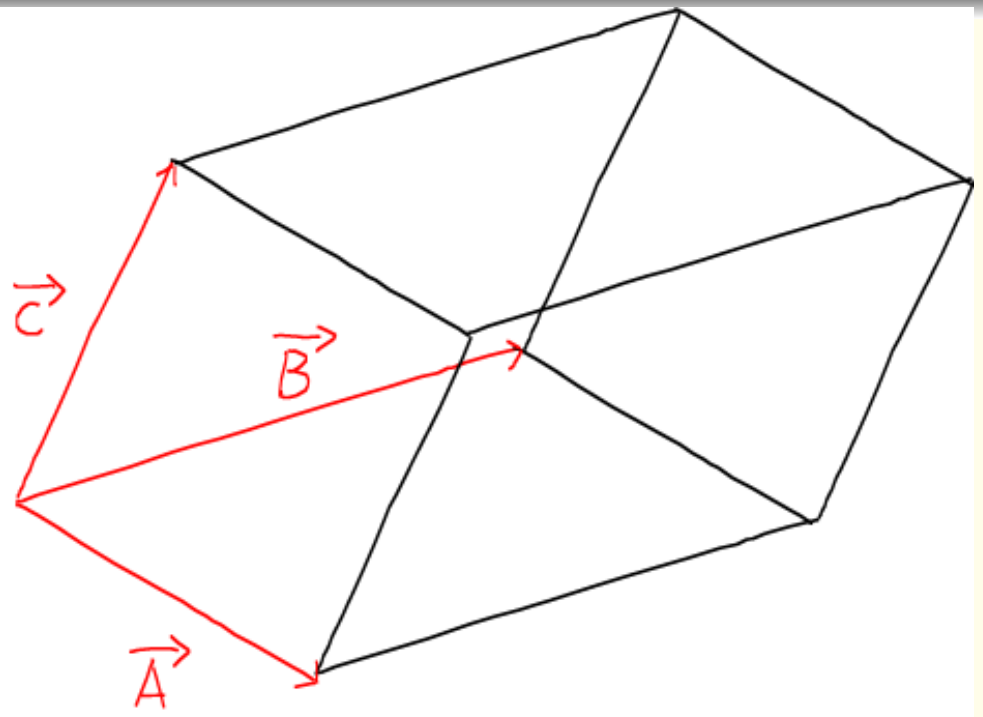
C'est une opération mathématique faisant intervenir trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ de la manière suivante :

$$V = \vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) \qquad \text{scalaire !}$$

Le produit mixte est invariant par permutation circulaire, c-à-d :

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A})$$

Le produit mixte mesure le volume construit sur la base des trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$.



Volume $V = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B})$

Produit vectoriel double :

On le définit par la formule suivante :

$$\vec{D} = \vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) \qquad \text{vecteur !}$$

Selon la formule de Gibbs, le vecteur $\vec{D}$ s'écrit :

$$\vec{D} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \qquad \text{lire BAC-CAB !}$$

Champs de vecteurs

Généralement, les grandeurs vectorielles (et même les grandeurs scalaires !) sont définies en tout point de l'espace. De ce fait, elles changent de module, de direction et de sens d'un point à un autre. Mathématiquement, on les représentent par des vecteurs en tout point : c'est ce qu'on appelle un champ vectoriel.

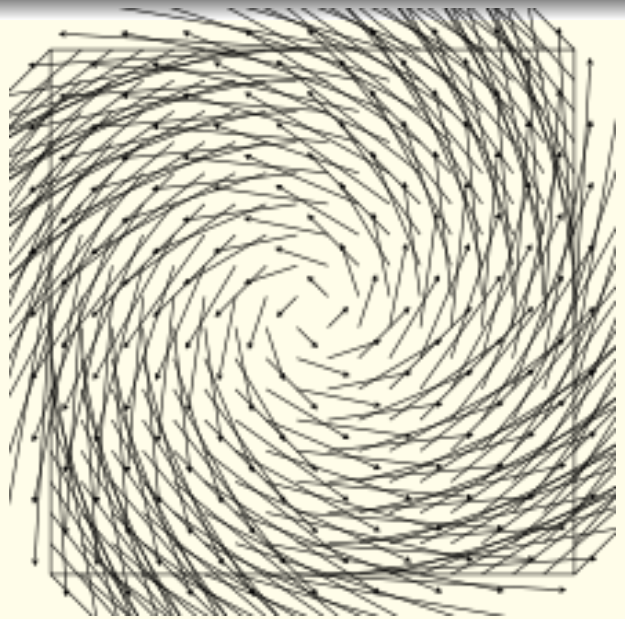


Figure : Exemple d'un champ vectoriel : $\vec{A}(x,y,z) = -y\vec{i} + x\vec{j}$

Exemple

$$\vec{A}(x,y,z) = -y\vec{i} + x\vec{j}$$

est un champ vectoriel avec les composantes $A_x(x,y,z) = -y$ et $A_y(x,y,z) = x$ varient d'un point à un autre ($A_z(x,y,z) = 0$).

Au point (1,1,1), la grandeur vectorielle représentée par le champ vectoriel $\vec{A}$ est donnée par le vecteur :

$$\vec{A}(1,1,1) = -\vec{i} + \vec{j}$$

Remarque

Le champ vectoriel est défini en tout point de l'espace (ex : variation de la température dans une pièce !), alors qu'un ensemble de vecteurs représentant, par exemple, l'état de mouvement d'un ensemble de particules n'est pas un champ vectoriel, car ces vecteurs ne sont définis qu'aux points où se trouvent les particules elles-mêmes ! !

Pourquoi intéresse-t-on à d'autres systèmes de coordonnées ?

Le système de coordonnées cartésiennes est très utile dans l'étude de mouvement rectiligne. Cependant, il existe des situations physiques (rotations en mécanique, calcul du champ électrique en électrostatique, magnétostatique, mécanique des fluides, physique atomique...) où l'utilisation de ce système s'avère inutilement complexe. Il serait donc plus utile de se pencher sur d'autres systèmes de coordonnées afin de faciliter l'étude de ces situations.

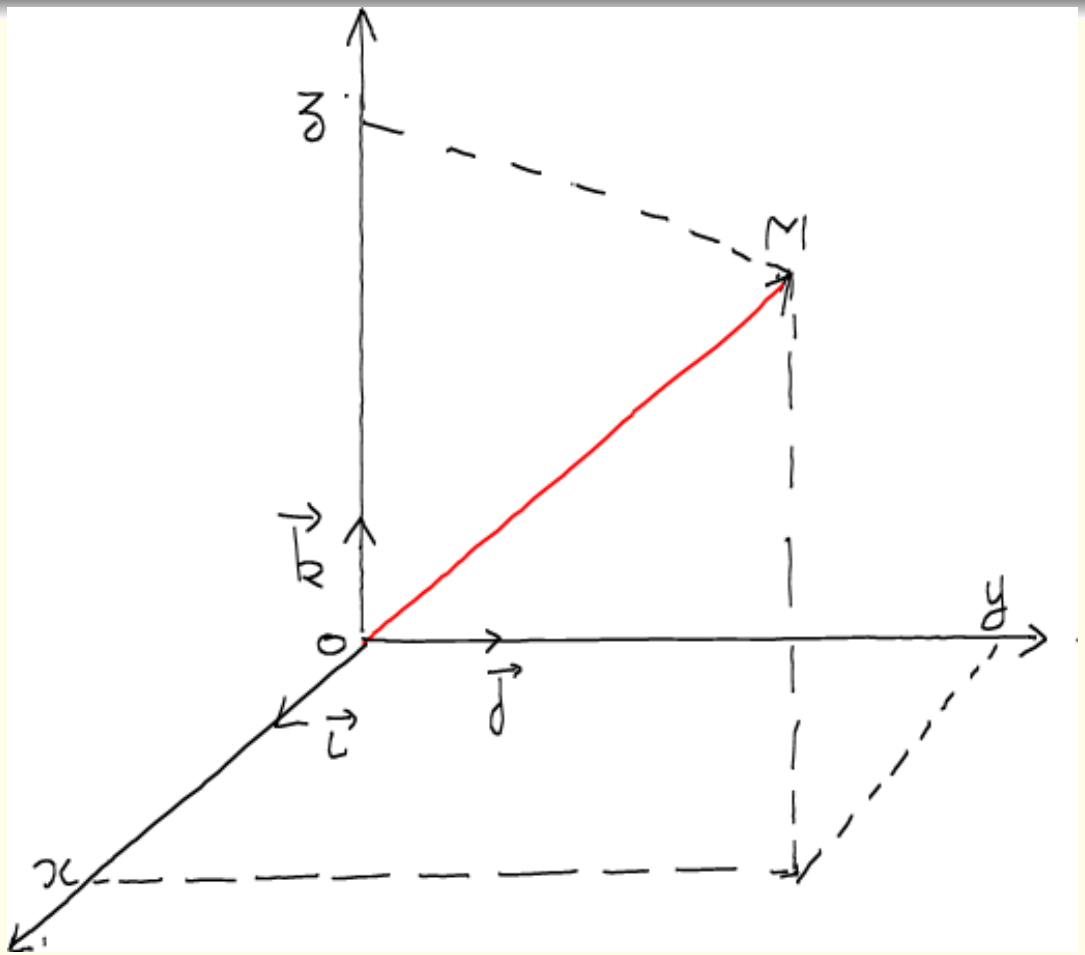
Dans ce qui suit on s'intéresse à trois systèmes de coordonnées physiques, à savoir : système de coordonnées cartésiennes (dites rectangulaires) et systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques (dites curvilignes).

Système de coordonnées cartésiennes

Un point M de l'espace est repéré par trois coordonnées rectangulaires x, y et z, tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad \text{(vecteur position)}$$

où $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont des vecteurs unitaires (de module égal à l'unité) et perpendiculaires entre eux, rapportés à l'origine fixe O, et dont les directions respectives sont fixes.

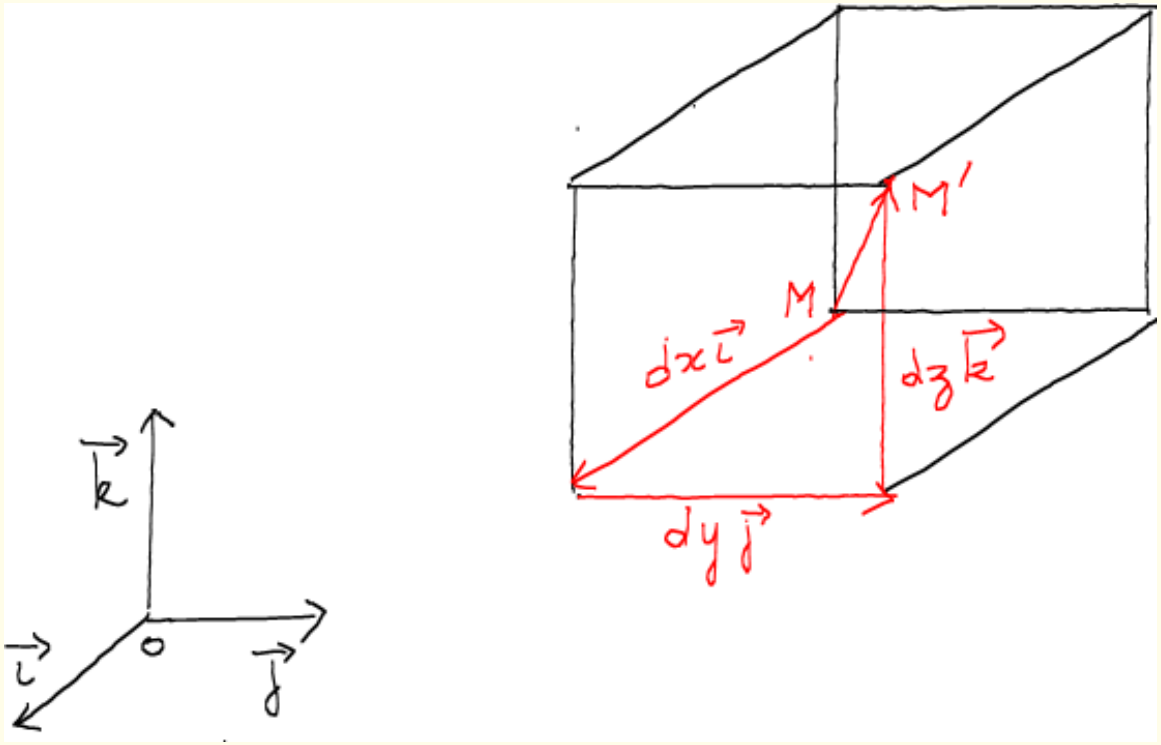


Les vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ vérifient les relations suivantes :

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \qquad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}, \qquad \text{et} \qquad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$$

Un déplacement infinitésimal du point M vers un point M' est donné par :

$$\overrightarrow{MM'} = d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$



Un volume infinitésimal est un parallélépipède de volume :

$$dV = dx\, dy\, dz$$

En déplaçant ce parallélépipède dans toutes les directions, on peut recouvrir tout l'espace sans faille (vide)

Ce parallélépipède a trois surfaces élémentaires :

$$dS_x = dy\, dz, \qquad dS_y = dx\, dz \qquad \text{et} \qquad dS_z = dx\, dy$$

où l'indice en S indique la direction normale (perpendiculaire) à la surface !

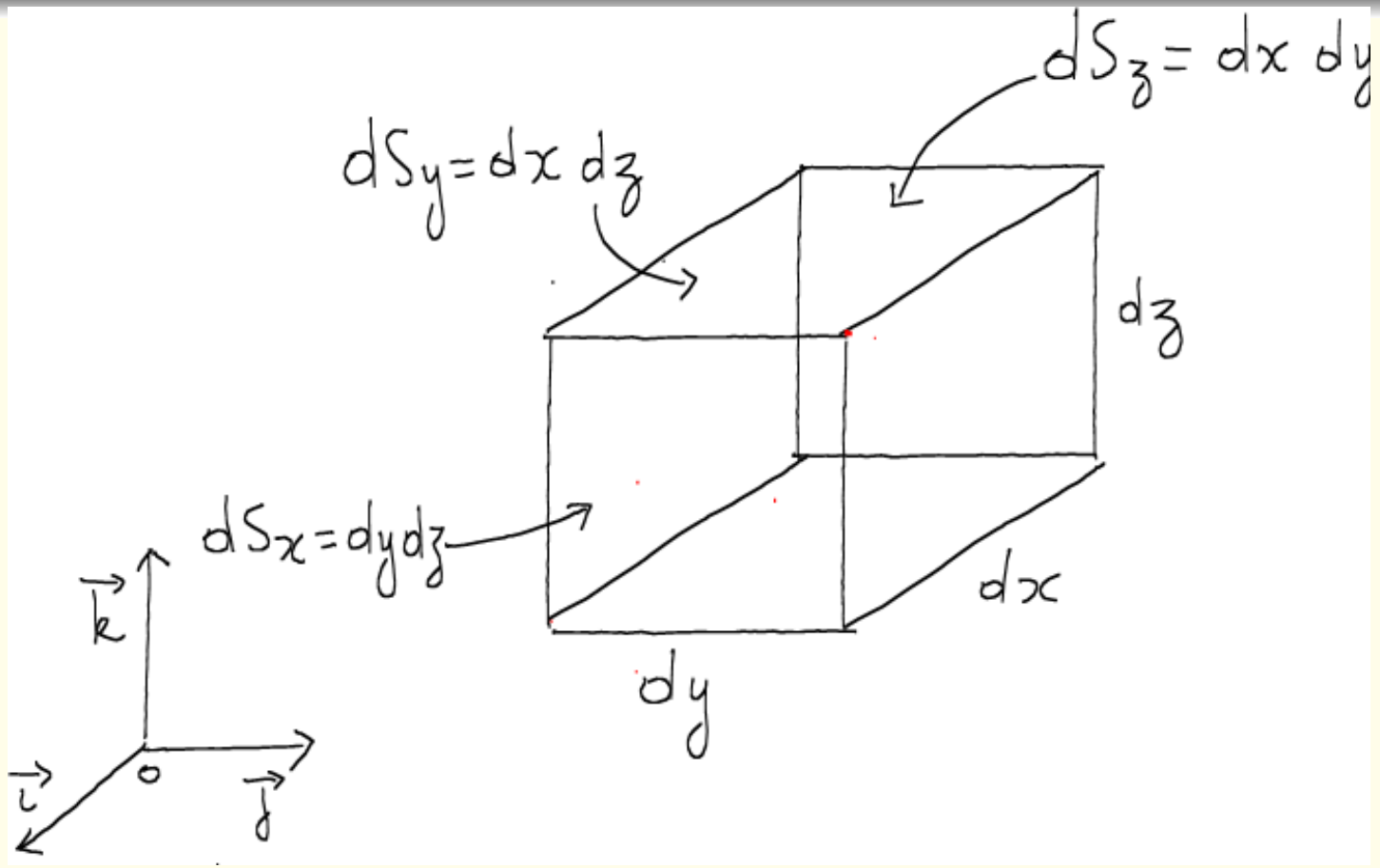


Figure : Trois surfaces élémentaires limitant le volume élémentaire $dV = dx\,dy\,dz$ dans le système de coordonnées cartésiennes

Coordonnées cylindriques

Un point M dans l'espace est repéré par trois coordonnées :ρ, θ et z auxquelles on accorde trois vecteurs unitaires perpendiculaires entre eux, $\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_z$, respectivement, dirigés dans le sens de la variation des coordonnées (appelée ligne de coordonnée), tels que :

$$0 \leq \rho \leq \infty, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi \qquad \text{et} \qquad -\infty \leq z \leq \infty$$

et

$$\vec{u}_\rho \wedge \vec{u}_\theta = \vec{u}_z, \qquad \vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho = \vec{u}_\theta, \qquad \text{et} \qquad \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_\rho$$

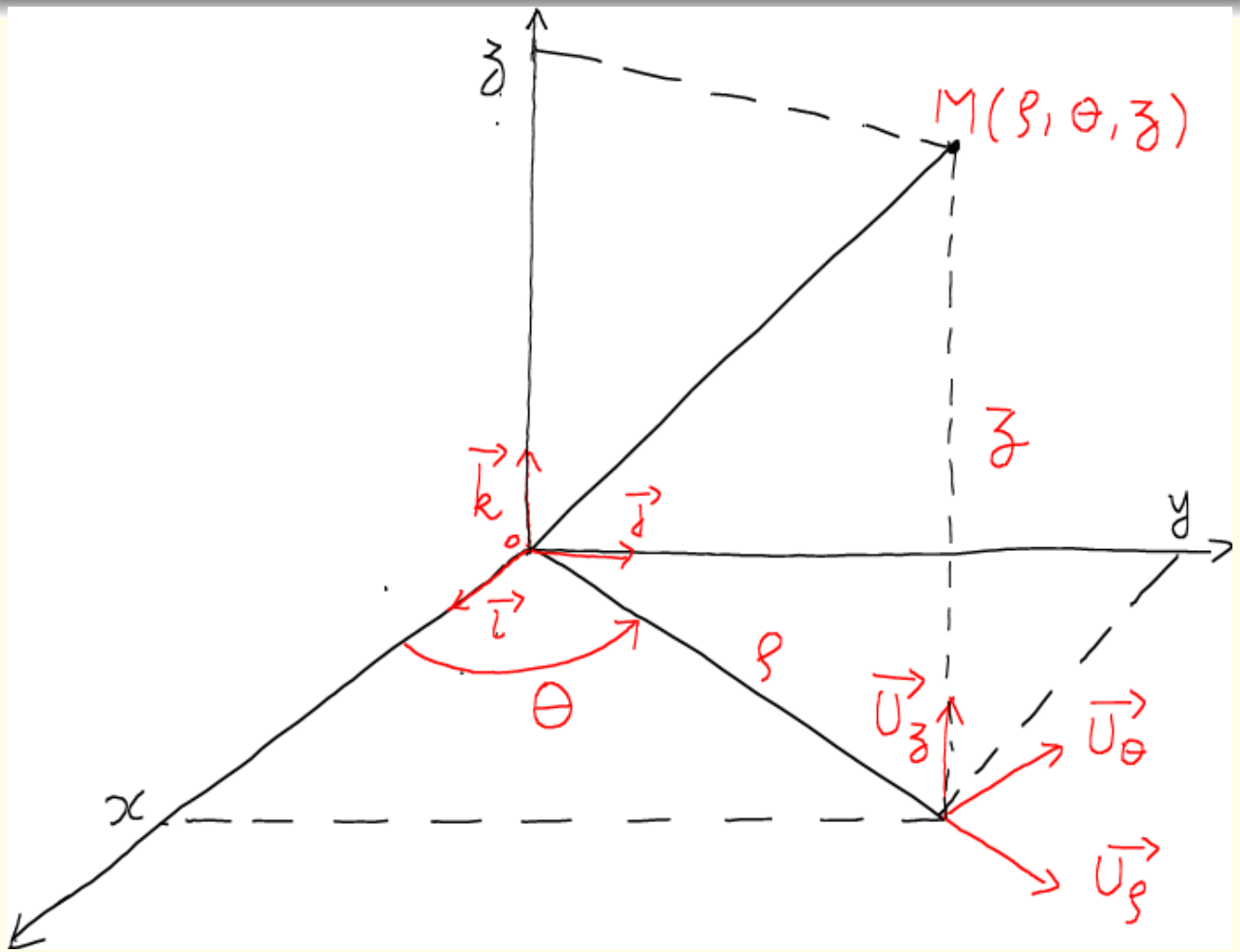


Figure : Disposition des vecteurs du repère de coordonnées cylindriques par rapport au repère de coordonnées cartésiennes

Le vecteur position d'un point M s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z$$

On peut exprimer les coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées cylindriques comme suit :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ x = \rho\cos\theta \\ z = z \end{cases}$$

ainsi que les vecteurs unitaires

$$\begin{cases} \vec{u}_\rho = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} \\ \vec{u}_z = \vec{k} \end{cases}$$

Un déplacement infinitésimal entre les points M et M' est donné par :

$$\overrightarrow{MM'} = d\vec{l} = d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$$

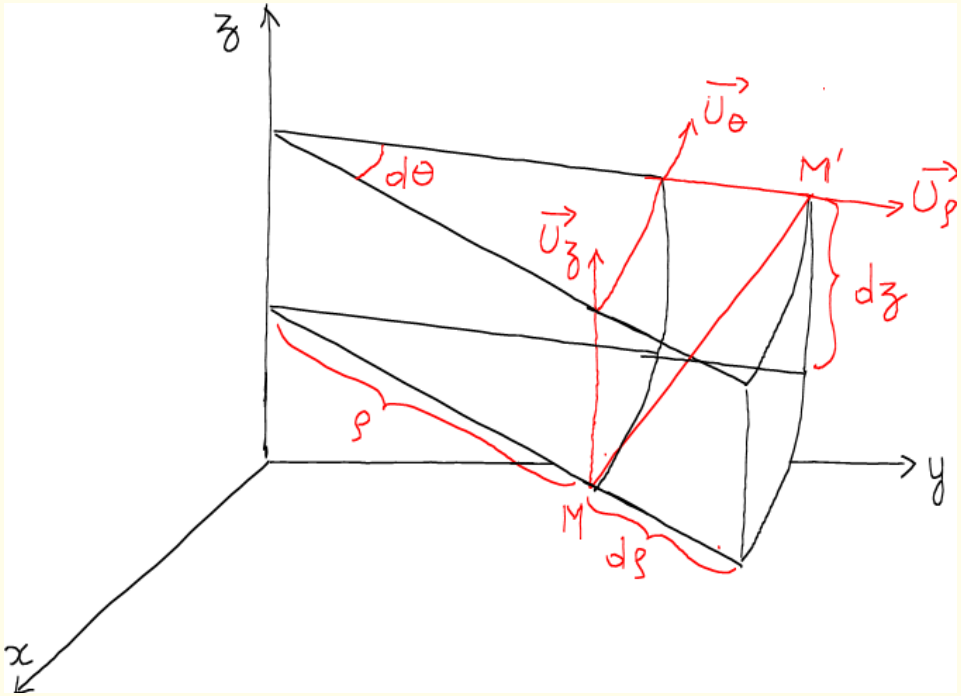


Figure : déplacement infinitésimal dans le système de coordonnées cylindriques

Les surfaces élémentaires sont :

$$dS_\rho = \rho d\theta dz, \qquad dS_\theta = d\rho dz, \qquad \text{et} \qquad dS_z = \rho d\rho d\theta$$

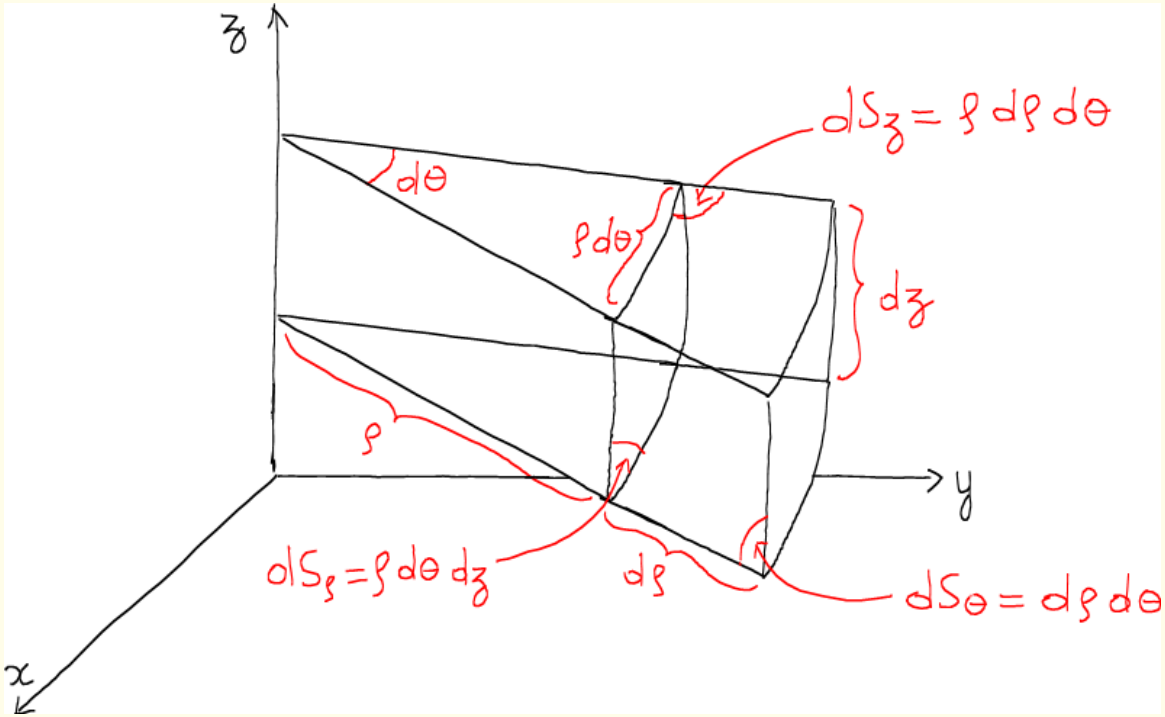


Figure : Volume et surfaces élémentaires dans le système de coordonnées cylindriques

Le volume élémentaire est égal à :

$$dV = \rho d\rho d\theta dz$$

Coordonnées sphériques

Un point M dans l'espace est repéré par trois coordonnées :r, θ et φ auxquelles on accorde trois vecteurs unitaires perpendiculaires entre eux, $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\varphi$, respectivement, dirigés dans le sens de la variation des coordonnées (appelée ligne de coordonnée), tels que :

$$0 \leq r \leq \infty, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi \qquad \text{et} \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

et

$$\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = \vec{u}_\varphi, \qquad \vec{u}_\varphi \wedge \vec{u}_r = \vec{u}_\theta, \qquad \text{et} \qquad \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_\varphi = \vec{u}_r$$

Le vecteur position d'un point M s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$$

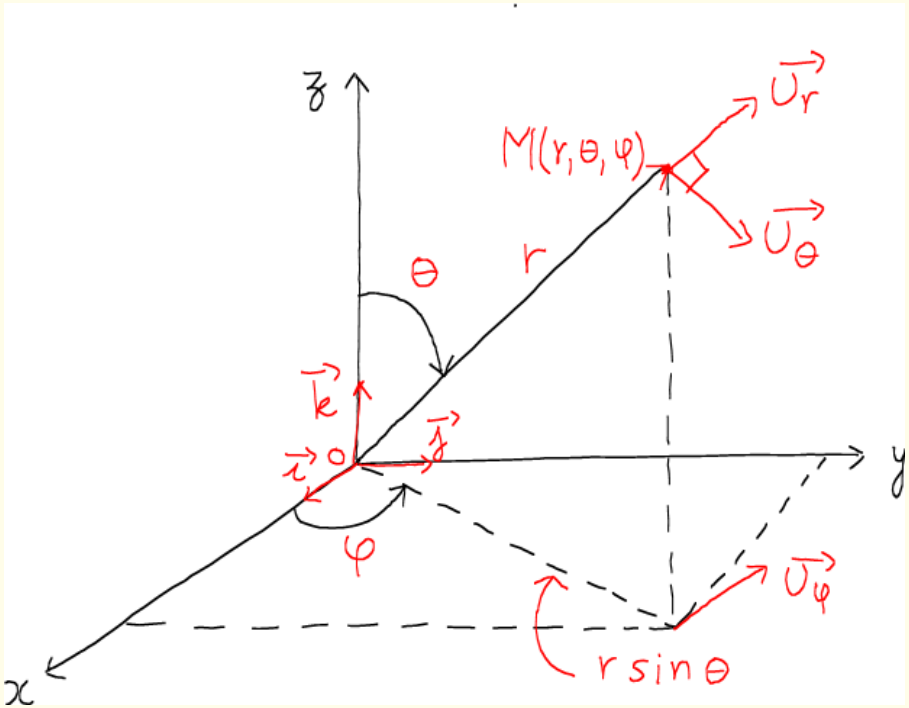


Figure : Un point M repéré dans un système de coordonnées sphériques

Contrairement au système de coordonnées cartésiennes, les vecteurs unitaires dans les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques ne sont pas fixes ; leurs directions changent selon la position du point considéré

Un déplacement infinitésimal entre les points M et M' est donné par :

$$\overrightarrow{MM'} = d\vec{r} = dr\vec{u}_r + r\,d\theta\vec{u}_\theta + r\,\sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi$$

Le volume élémentaire est égal à :

$$dV = r^2\,\sin\theta\,drd\theta d\varphi$$

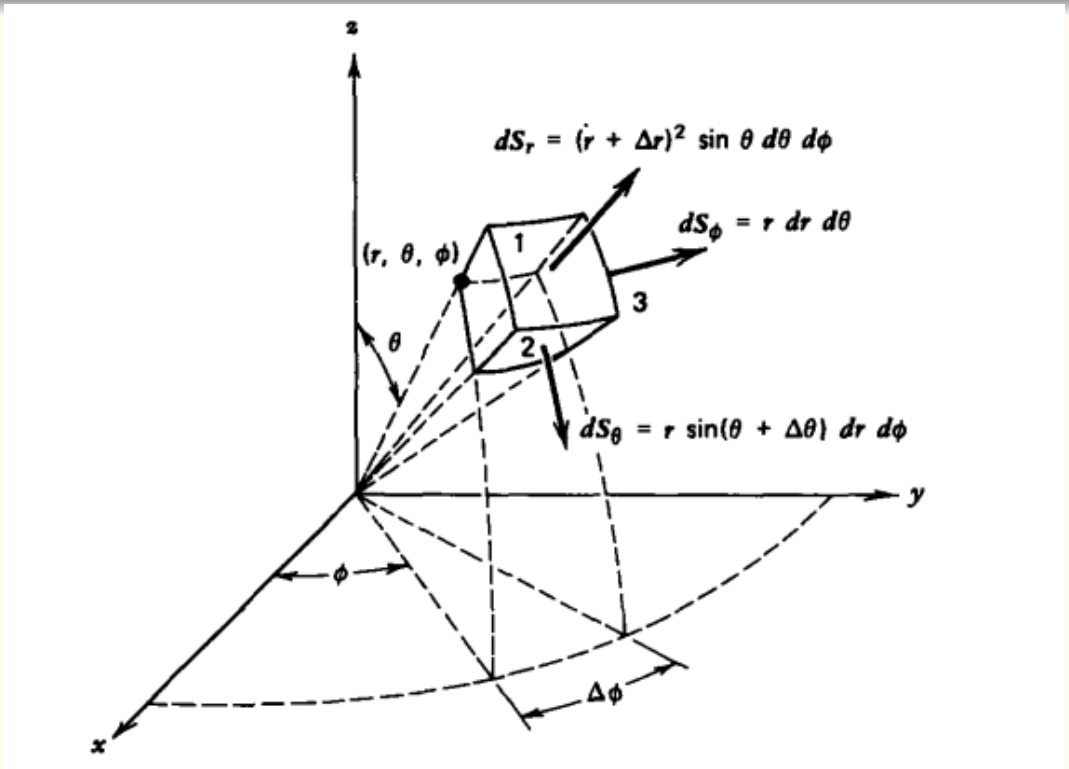


Figure : Volume et surfaces élémentaires dans un système de coordonnées sphériques

Les surfaces élémentaires sont :

$$dS_r = r^2 \sin\theta \, d\theta d\varphi, \qquad dS_\theta = r \sin\theta \, dr d\varphi, \qquad \text{et} \qquad dS_\varphi = r \, dr \, d\theta$$

On peut exprimer les coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées sphériques comme suit :

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\varphi \end{cases}$$

ainsi que les vecteurs unitaires

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \sin\theta \cos\varphi \vec{i} + \sin\theta \sin\varphi \vec{j} + \cos\theta \vec{k} \\ \vec{u}_\theta = \cos\theta \cos\varphi \vec{i} + \cos\theta \sin\varphi \vec{j} - \sin\theta \vec{k} \\ \vec{u}_\varphi = -\sin\varphi \vec{i} + \cos\varphi \vec{j} \end{cases}$$

Différentielle totale

Considérons une grandeur physique représentée par une fonction à trois variables de l'espace (champ scalaire) $f(x, y, z)$. La variation de f lorsqu'on fait un déplacement infinitésimal le long d'un vecteur

$$d\vec{\ell} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

est définie comme étant la somme des variations de f le long d'une variable tout en considérant les deux autres variables comme constantes, telle que :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Ceci est la différentielle totale de la fonction f.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ sont les dérivées partielles de f par rapport à x, y et z, respectivement.

Attention !

df est appelée différentielle totale exacte car la fonction f ne dépend que des positions x, y et z (l'état actuel des choses) et non pas de l'historique qui a mené à cette valeur de f en ces coordonnées. Mathématiquement, cela a une conséquence sur les dérivées deuxièmes mixtes (croisées) de f par rapport aux coordonnées x, y et z, à savoir :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$$

Gradient d'une fonction

Remarquons que la différentielle totale df de f peut se mettre sous la forme :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$$

ou encore

$$df(x, y, z) = \overrightarrow{grad} f \cdot d\vec{l}$$

Le "gradient" d'une fonction scalaire f ($\overrightarrow{grad} f$) consiste à fabriquer un vecteur dont les composantes sont les dérivées partielles de f par rapport aux coordonnées x, y et z, soit :

$$\overrightarrow{grad} f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \qquad (vecteur)$$

On définit un opérateur $\vec{\nabla}$ (lire nabla !) comme suit :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

tel que

$$\overrightarrow{grad} f = \vec{\nabla} f$$

$\vec{\nabla}$ est un vecteur dont les composantes ne sont que des dérivées ! ! !

$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{l} = |\vec{\nabla} f||d\vec{l}| \cos\theta$$

La variation de df est maximale lorsque $\cos\theta = 1$, c'est à dire lorsque $\vec{\nabla} f$ et $d\vec{l}$ sont colinéaires (dans le même sens)

Le gradient $\vec{\nabla} f$ donne la direction de la variation maximale de f

Le gradient en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$$

.

Le gradient en coordonnées sphériques :

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$$

Divergence d'un vecteur

En faisant opérer l'opérateur vecteur $\vec{\nabla}$ sur un vecteur $\vec{A}$ à travers un produit scalaire, on trouve :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot(A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Divergence en coordonnées cartésiennes

On appelle $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ divergence du vecteur $\vec{A}$:

$$div\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (scalaire)$$

Divergence en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Divergence en coordonnées sphériques :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

Attention ! ! !

Dans les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques, la divergence d'un vecteur $\vec{A}$ n'est plus un simple produit scalaire entre un opérateur $\vec{\nabla}$ et le vecteur $\vec{A}$, car les vecteurs unitaires dans ces deux systèmes de coordonnées changent de directions d'un point à un autre dans l'espace, contrairement aux vecteurs unitaires dans le système de coordonnées cartésiennes qui, eux, sont fixes !

Rotationnel d'un vecteur

En faisant opérer l'opérateur vecteur $\vec{\nabla}$ sur un vecteur $\vec{A}$ à travers un produit vectoriel, on trouve :

$$\vec{Rot}\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right) \wedge (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k})$$

ce qui donne

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}.$$

Rotationnel en coordonnées cartésiennes

Le rotationnel de $\vec{A}$ s'écrit :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{u}_\rho - \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\vec{u}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right)\vec{u}_z$$

Rotationnel en coordonnées sphériques :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{u}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta +$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{u}_\varphi$$

Attention

Dans les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques, le rotationnel d'un vecteur $\vec{A}$ n'est plus un simple produit vectoriel entre un opérateur $\vec{\nabla}$ et le vecteur $\vec{A}$, car les vecteurs unitaires dans ces deux systèmes de coordonnées changent de directions d'un point à un autre dans l'espace, contrairement aux vecteurs unitaires dans le système de coordonnées cartésiennes qui, eux, sont fixes !

Laplacien

Par définition, le Laplacien d'une fonction f est la divergence du vecteur gradient de cette même fonction :

$$\Delta f \equiv div(\overrightarrow{grad} f) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \vec{\nabla}^2 f$$

Laplacien en coordonnées cartésiennes

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Le Laplacien d'un vecteur est donné par :

$$\Delta \vec{A} \equiv \Delta A_x \vec{i} + \Delta A_y \vec{j} + \Delta A_z \vec{k}$$

Laplacien en coordonnées cylindriques

$$\Delta f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Laplacien en coordonnées sphériques

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Quelques relations utiles

1. Le rotationnel d'un gradient est toujours nul : $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} f) = \vec{0}$
2. La divergence d'un rotationnel est toujours nulle : $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0$
3. $\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
4. $\vec{\nabla} \cdot (f\vec{A}) = f\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})f$
5. $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta\vec{A}$

Circulation d'un vecteur le long d'un contour

La circulation d'un vecteur $\vec{A}$ le long d'un chemin entre les points a et b est définie comme suit :

$$C \equiv \int_a^b \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

$d\vec{\ell}$ est le vecteur d'un déplacement infinitésimal le long du contour considéré.

Exemple

Le travail d'une force $\vec{F}$ le long d'une trajectoire est donné par :

$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

Pour un contour fermé, on écrit

$$C \equiv \oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

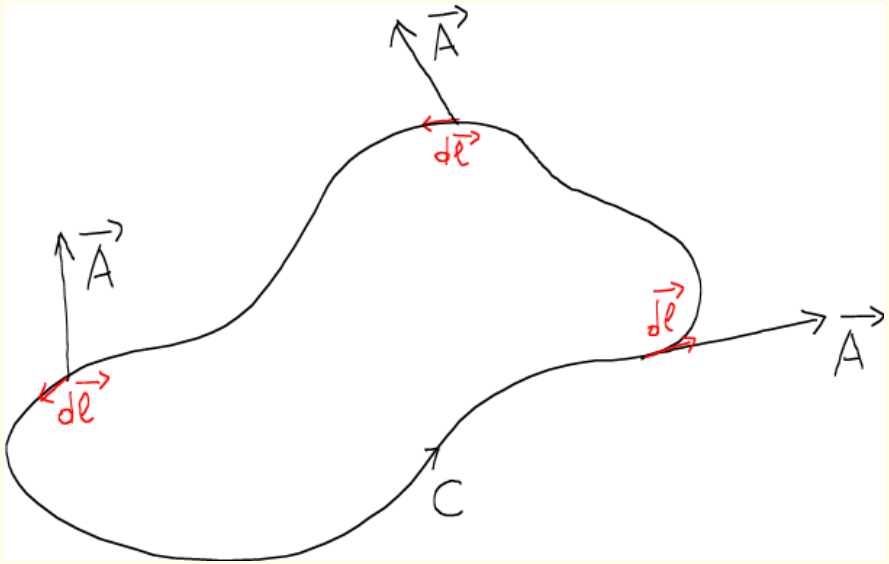


Figure : La circulation le long d'un contour fermé C du vecteur $\vec{A}$

Cas particulier

Si le vecteur $\vec{A}$ dérive d'une fonction scalaire U (un gradient d'une fonction U tel que $\vec{A} = \vec{\nabla} U$) on aura :

$$C = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{\nabla} U \cdot d\vec{l} + \int_b^a \vec{\nabla} U \cdot d\vec{l}$$

Mais on sait que $dU = \vec{\nabla} U \cdot d\vec{l}$; ce qui donne :

$$C = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_a^b dU + \int_b^a dU = U_b - U_a + U_a - U_b = 0!$$

La circulation le long d'un contour fermé d'un vecteur gradient est toujours nulle.

Flux d'un vecteur à travers une surface

Le flux d'un vecteur $\vec{A}$ à travers une surface est défini comme suit :

$$\Phi \equiv \iint \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

$d\vec{S}$ est le vecteur normal à la surface infinitésimale appartenant à la surface à travers laquelle le flux est mesuré.

Exemple

Le débit d'une quantité de matière m à travers une surface :

$$\frac{dm}{dt} = \rho \iint \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

où $\vec{v}$ est la vitesse des particules de la matière et ρ sa masse volumique.

Pour une surface fermée, on écrit

$$\Phi \equiv \oint \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

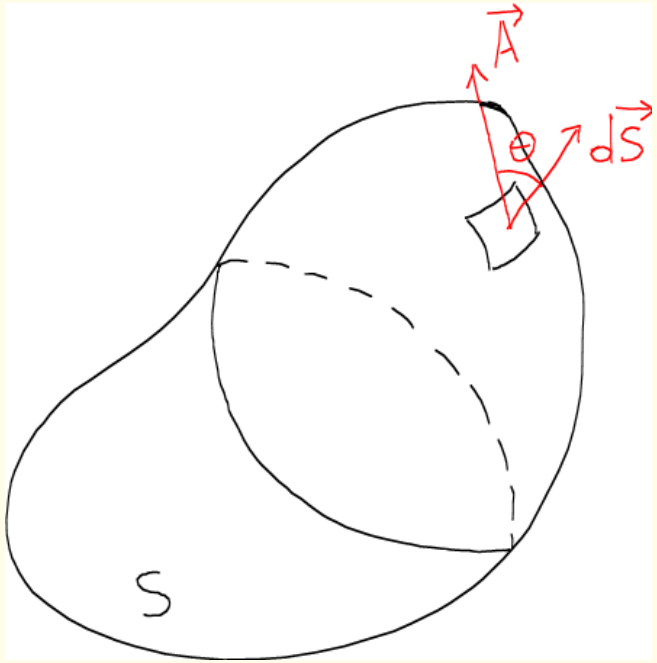


Figure : Surface fermée à travers laquelle passe un flux du vecteur $\vec{A}$

La convention consiste à prendre le vecteur de l'élément de surface $d\vec{S}$ pointant vers l'extérieur du volume délimité par la surface.

Si le flux d'une grandeur vectorielle à travers une surface fermée est positif (le flux sortant est supérieur au flux entrant), on dit qu'on a une source (qui produit, par exemple, de la matière !)

Si le flux d'une grandeur vectorielle à travers une surface fermée est négatif (le flux sortant est inférieur au flux entrant), on dit qu'on a un puits (qui "avale", par exemple, de la matière !)

Théorème de divergence (Green-Ostrogradsky)

On peut montrer que le flux du vecteur $\vec{A}$ à travers une surface fermée infinitésimale est donné par :

$$d\Phi = \vec{A} \cdot d\vec{S} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})\, dV$$

où dV est le volume délimité par la surface $d\vec{S}$.

ou encore

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{d\Phi}{dV}$$

La divergence d'un vecteur $\vec{A}$ en un point est nulle si le flux à travers une surface fermée délimitant un volume infinitésimal centré sur ce même point est nul !

En découpant un volume V en un ensemble de volumes infinitésimaux adjacents, on voit bien que le flux d'une grandeur vectorielle $\vec{A}$ qui sort à travers une surface d'un volume infinitésimal est considéré comme entrant à travers la même surface du volume infinitésimal voisin. De cette manière les flux à l'intérieur du volume total sont tous nuls ; il ne reste que le flux à travers la surface délimitant le volume total.

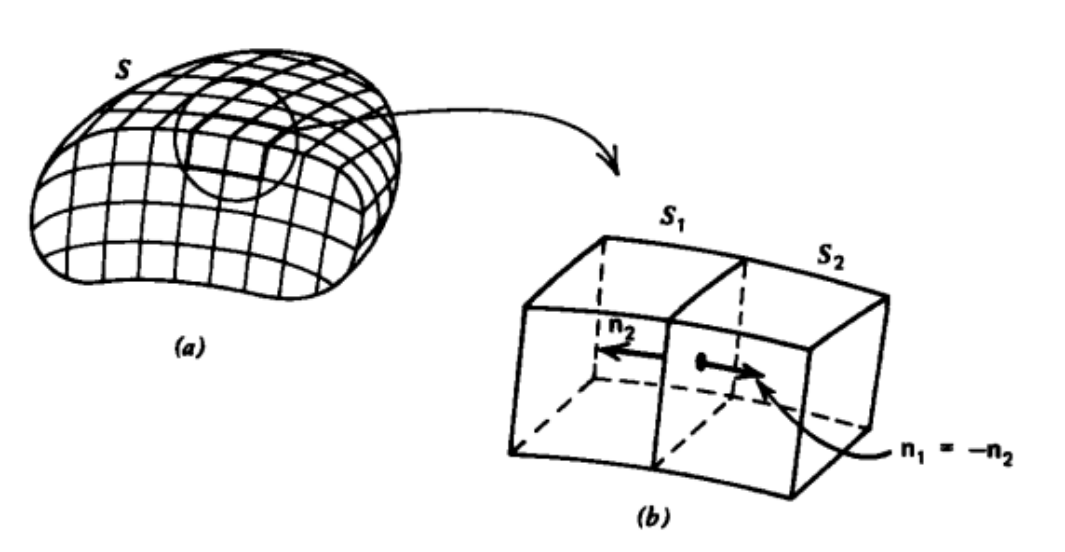


Figure : Les flux à travers les surfaces internes s'entre-annulent

Cela nous permet d'écrire :

$$\Phi = \oint \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V div\vec{A}\, dV$$

où V est le volume délimitant la surface fermée. Ceci est la forme intégrale du théorème de divergence

Théorème de Stokes

On peut montrer que la circulation d'un vecteur $\vec{A}$ le long d'un contour fermé infinitésimal est donné par :

$$dC = \vec{A} \cdot d\vec{l} = (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

où $d\vec{S}$ est le vecteur normal à la surface délimitée par le contour infinitésimal dC. Ce qui donne encore

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{dC}{d\vec{S}}$$

Le rotationnel d'un vecteur $\vec{A}$ en un point est nul si la circulation de $\vec{A}$ le long du contour infinitésimal centré sur ce même point est nul !

Interprétation physique du rotationnel d'un vecteur

Comme son nom l'indique, le rotationnel d'un vecteur $\vec{A}$ en un point nous renseigne sur la capacité du champ $\vec{A}$ à faire tourner autour d'un axe de rotation un objet mis en ce point !

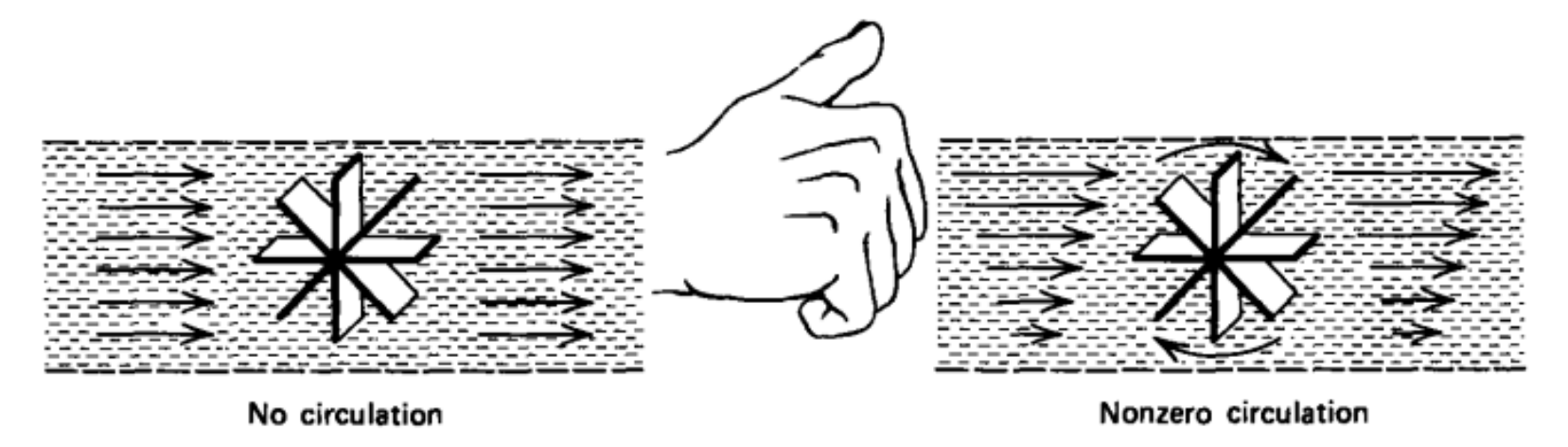


Figure : Interprétation physique d'un rotationnel d'un vecteur $\vec{A}$

En découpant une surface S en un ensemble de surfaces infinitésimales adjacentes, on voit bien que la circulation d'une grandeur vectorielle $\vec{A}$ le long d'un coté d'une surface infinitésimale dans un sens est considérée comme une circulation dans le sens opposé le long du même coté de la surface infinitésimale adjacente.

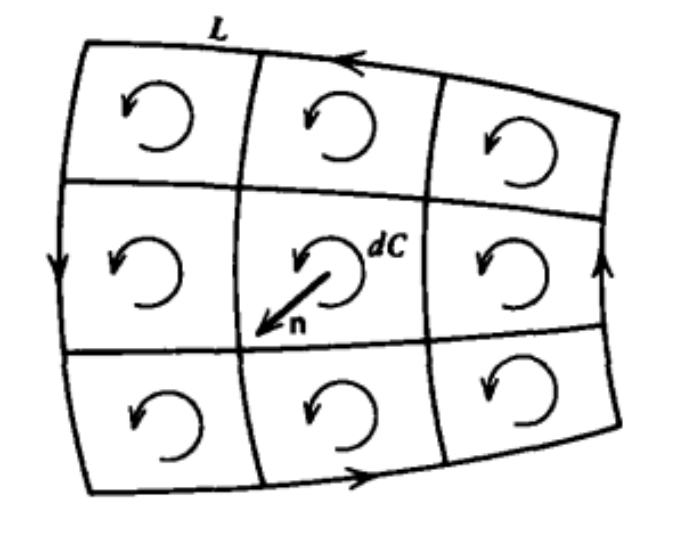


Figure : Les circulations internes s'entre-annulent entres elles.

De cette manière les circulations à l'intérieur de la surface totale S sont toutes nulles ; il ne reste que la circulation le long du contour délimitant la surface totale. Cela nous permet d'écrire :

$$C = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

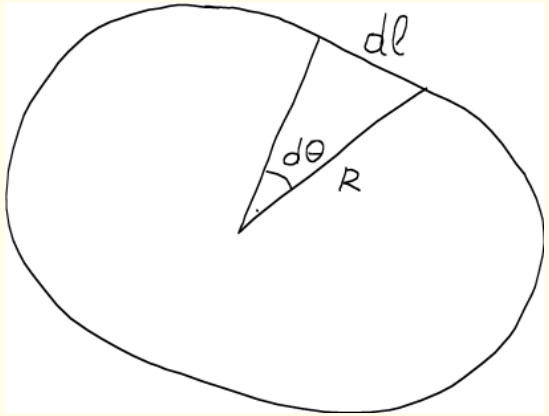
où S est la surface délimitant le contour fermé.
Ceci est la forme intégrale du théorème de Stokes

Notion d'angle solide

La notion d'angle solide est l'extension naturelle dans l'espace de l'angle défini dans un plan

$$d\theta = \frac{dl}{R}$$

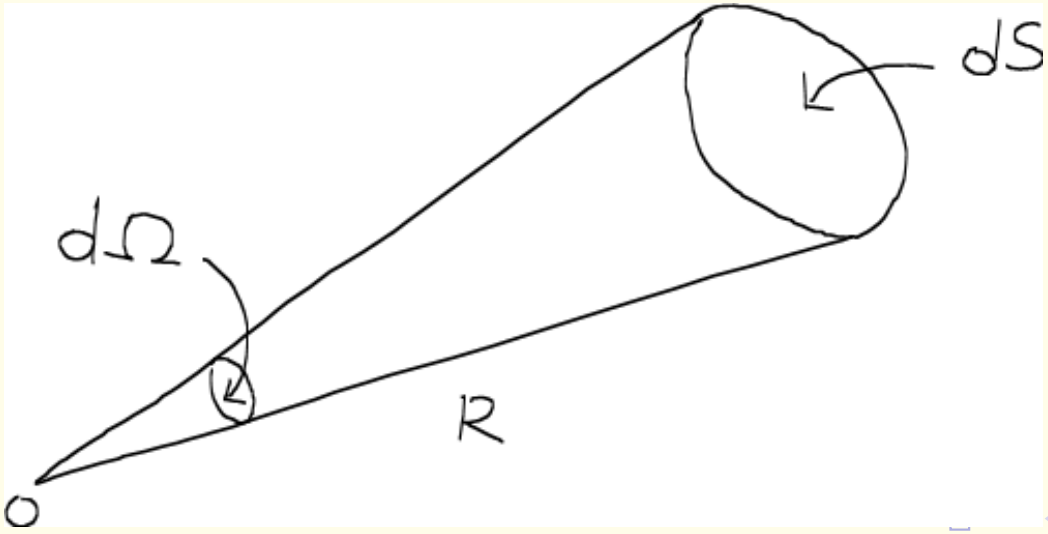
où dl est un arc infinitésimal rapporté à un cercle de rayon R. En balayant le cercle (et plus généralement le plan) à partir d'un point, on aurait fait un angle de $2\pi\ rad$.



De la même manière, on définit l'angle solide élémentaire $d\Omega$ délimité par un cône coupant un élément de surface élémentaire dS située à une distance R de son sommet O comme suit :

$$d\Omega = \frac{dS}{R^2}$$

indépendant de R et est mesuré en stéradian (str).



En balayant l'espace à partir d'un point, on aurait fait un angle solide égal à :

$$\Omega = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi\, str$$

Pour une surface quelconque (ne faisant pas partie d'une surface d'une sphère), on va imaginer un point d'observation O et un élément de surface dS orienté dans une direction quelconque $\vec{n}$ telle que $d\vec{S} = dS\,\vec{n}$. A cet élément de surface on associe un angle solide relatif au point d'observation O :

$$d\Omega = \frac{dS'}{R^2}$$

dS' est la projection de la surface élémentaire dS sur le plan dont la normale est suivant le vecteur unitaire $\vec{u}_r$ émanant de O, de telle sorte que $dS' = d\vec{S} \cdot \vec{u}_r$.

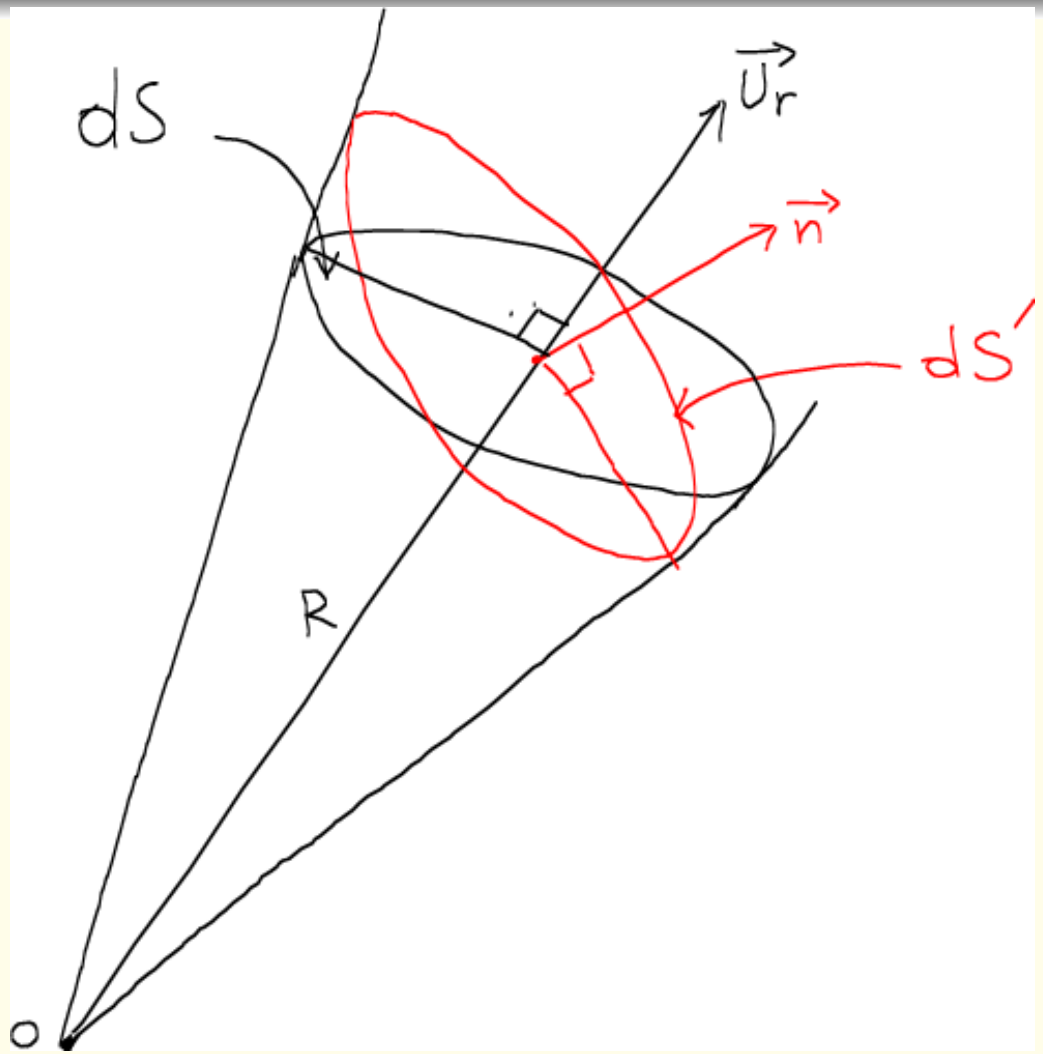


Figure : Une surface quelconque (réelle) dS' en rouge et la surface apparente dS (régulière : appartenant à une sphère de rayon R) en noir

$$d\Omega = \frac{d\vec{S}\cdot\vec{u}_r}{R^2} = \frac{dS\,\vec{n}\cdot\vec{u}_r}{R^2} = \frac{dS}{R^2}\cos\theta$$

où θ est l'angle entre les deux vecteurs unitaires $\vec{n}$ et $\vec{u}_r$.

On peut voir la surface dS comme la surface apparente de dS' à un observateur en O. C'est le cas quand vous masquez l'image de la lune par la toute petite doigt de votre main ! ! ! En fait, c'est la surface apparente (à vous) de la lune que vous venez de masquer et non pas la surface réelle de la lune !